

有限体積法による三次元電位・電流分布解析

Three-dimensional electric potential and current distribution analysis with FVM

Author : 志多 友史 (Yuji Shida)

Date : 2018/9/8

Keywords : 有限体積法(FVM: Finite Volume Method), 電位(electric potential), 電流(electric current), 電流保存則(Kirchhoff's Current Law), 連立一次方程式(coalition linear equation), BiCG-STAB 法(Biconjugate Gradient Stabilized Method), 数値計算(numerical calculation), C 言語(C programming language)

Abstract:=====

本稿では、三次元空間における電位・電流分布を有限体積法を用いて解析する。具体的には解析領域を微小な立方体に分割し、それぞれに電流保存則を適用して巨大な連立一次方程式を立てて、解くというものである。本稿では理論解が存在する球型・円筒型及び円錐台型の抵抗体の解析を行い、計算プログラムが妥当である事を確認した後、複雑な形状であるH型管を用いた水電気分解装置の電流分布解析を行う。

In this report, I analyzed electric potential and current distribution in the three-dimensional space with Finite Volume Method. Concretely, first divide the analysis space into micro cubes, next apply Kirchhoff's Current Law to each cubes, finally set up huge coalition linear equation and solve it. After analyzing the ball type, cylinder type as well as truncated cone type resistor which has theoretical solutions and having confirmed that the calculation program is proper, I analyzed the electric current distribution of the water electrolytic cell using the H shaped glass tube which is complicated shape.

=====

1. 序論(Introduction)

三次元の電位・電流分布の解析方法を理解し、具体的な問題に対する解析能力の向上を図るため、有限体積法を用いた解析プログラムの作成を行う。

有限体積法は解析領域をコントロールボリュームという微小領域に分割し、その領域に物理的保存則を適用して方程式を立て、最終的に巨大な連立一次方程式を解いて現象の解析を行う手法である。原理としては比較的単純なので、取っ掛かりとしてこの手法の習得を心掛ける。

2. 理論(Theory)

本解析プログラムで用いる基礎理論について以下に記す。

2. 1. 物質中の電位・電流と有限体積法の適用

解析領域を下図のように格子状に分割したものを考える。この分割してできた格子1つ1つをコントロールボリュームといい、これに対して保存則を適用する。なお、コントロールボリュームは必ずしも立方体である必要はない。

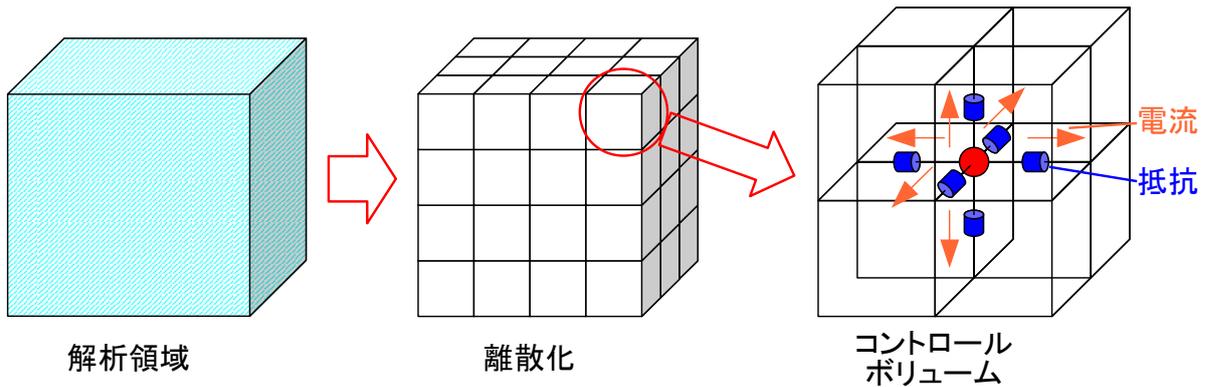


図2. 1 有限体積法の適用

本稿では、このコントロールボリュームに電流保存則を適用する。すなわち、全てのコントロールボリュームは電流密度ベクトルを \mathbf{u} とおいた時に下式を満足する必要がある。

$$\int_{\text{surface}} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad \text{or} \quad \int_{\text{volume}} \nabla \cdot \mathbf{u} dV = 0$$

ここでコントロールボリューム内の中心電位を $V_{(i,j,k)}$ 、各抵抗を $r_{(i-j,k)}$, $r_{(i+j,k)}$, $r_{(i,j-k)}$, $r_{(i,j+k)}$, $r_{(i,j,k-)}$, $r_{(i,j,k+)}$ とおくと i 方向の電流は以下のように表される。

$$u_{(i-,j,k)} = \frac{V_{(i,j,k)} - V_{(i-1,j,k)}}{r_{(i-1+,j,k)} + r_{(i-,j,k)}}, \quad u_{(i+,j,k)} = \frac{V_{(i,j,k)} - V_{(i+1,j,k)}}{r_{(i+,j,k)} + r_{(i+1-,j,k)}}$$

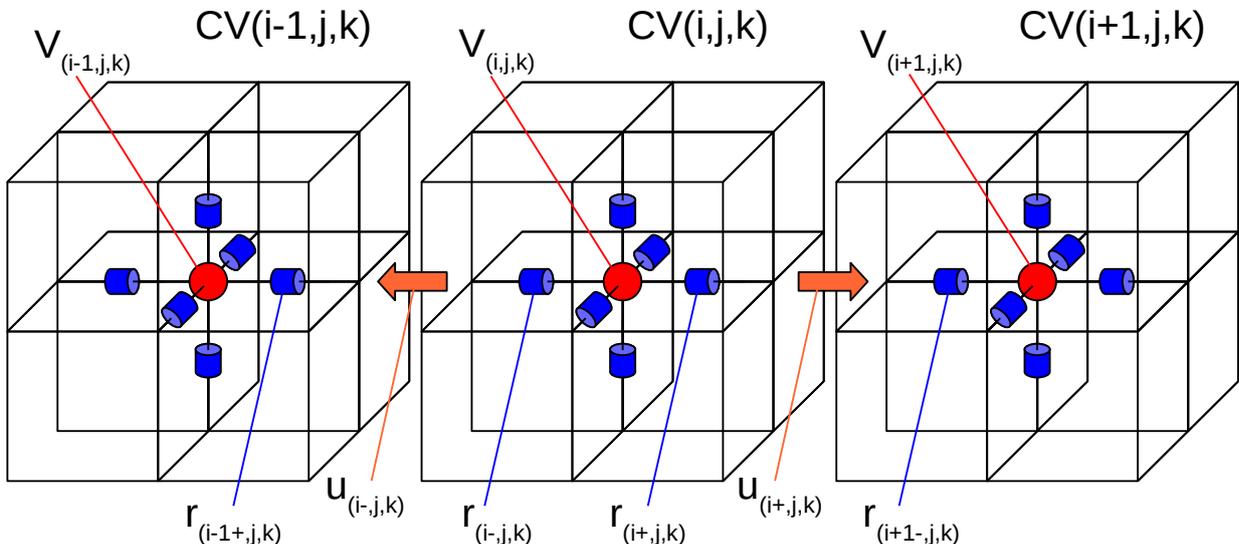


図2. 2 コントロールボリュームへの電流保存則の適用

これより j,k 方向の電流についても同様に求め、全ての電流を足し合わせると次のようになる。

$$\begin{aligned}\Sigma u &= u_{(i-,j,k)} + u_{(i+,j,k)} + u_{(i,j-,k)} + u_{(i,j+,k)} + u_{(i,j,k-)} + u_{(i,j,k+)} \\ &= \left(\frac{V_{(i,j,k)} - V_{(i-1,j,k)}}{r_{(i-1+,j,k)} + r_{(i-,j,k)}} + \frac{V_{(i,j,k)} - V_{(i+1,j,k)}}{r_{(i+,j,k)} + r_{(i+1-,j,k)}} \right) + \left(\frac{V_{(i,j,k)} - V_{(i,j-1,k)}}{r_{(i,j-1+,k)} + r_{(i,j-,k)}} + \frac{V_{(i,j,k)} - V_{(i,j+1,k)}}{r_{(i,j+,k)} + r_{(i,j+1-,k)}} \right) \\ &\quad + \left(\frac{V_{(i,j,k)} - V_{(i,j,k-1)}}{r_{(i,j,k-1+)} + r_{(i,j,k-)}} + \frac{V_{(i,j,k)} - V_{(i,j,k+1)}}{r_{(i,j,k+)} + r_{(i,j,k+1-)}} \right)\end{aligned}$$

ここで分母の抵抗の文字列が煩雑なので、以下のように表記を改める。また、電位の添字についても省略した形にする。

$$\begin{aligned}R_{i-} &= r_{(i-1+,j,k)} + r_{(i-,j,k)}, & R_{i+} &= r_{(i+,j,k)} + r_{(i+1-,j,k)} \\ R_{j-} &= r_{(i,j-1+,k)} + r_{(i,j-,k)}, & R_{j+} &= r_{(i,j+,k)} + r_{(i,j+1-,k)} \\ R_{k-} &= r_{(i,j,k-1+)} + r_{(i,j,k-)}, & R_{k+} &= r_{(i,j,k+)} + r_{(i,j,k+1-)}\end{aligned}$$

これを用いて式を書き換えると次のようになり、

$$\begin{aligned}\Sigma u &= \left(\frac{V_{(i)} - V_{(i-1)}}{R_{i-}} + \frac{V_{(i)}}{R_{i+}} - \frac{V_{(i+1)}}{R_{i+}} \right) + \left(\frac{V_{(j)} - V_{(j-1)}}{R_{j-}} + \frac{V_{(j)}}{R_{j+}} - \frac{V_{(j+1)}}{R_{j+}} \right) + \left(\frac{V_{(k)} - V_{(k-1)}}{R_{k-}} + \frac{V_{(k)}}{R_{k+}} - \frac{V_{(k+1)}}{R_{k+}} \right) \\ &= V_{(i,j,k)} \left(\frac{1}{R_{i-}} + \frac{1}{R_{i+}} + \frac{1}{R_{j-}} + \frac{1}{R_{j+}} + \frac{1}{R_{k-}} + \frac{1}{R_{k+}} \right) - \frac{V_{(i-1)}}{R_{i-}} - \frac{V_{(i+1)}}{R_{i+}} - \frac{V_{(j-1)}}{R_{j-}} - \frac{V_{(j+1)}}{R_{j+}} - \frac{V_{(k-1)}}{R_{k-}} - \frac{V_{(k+1)}}{R_{k+}}\end{aligned}$$

さらに $\Sigma_{1/R} = \frac{1}{R_{i-}} + \frac{1}{R_{i+}} + \frac{1}{R_{j-}} + \frac{1}{R_{j+}} + \frac{1}{R_{k-}} + \frac{1}{R_{k+}}$ とおいて、1行7列の行列 $A_{(1 \times 7)}$ と電位ベクトル \mathbf{V} 、加えて電流保存則より $\Sigma u = 0$ を用いて式を書き換えると次のような行列形式で方程式が表される。

$$A_{(1 \times 7)} \mathbf{V} = \left(-\frac{1}{R_{i-}}, -\frac{1}{R_{j-}}, -\frac{1}{R_{k-}}, \Sigma_{1/R}, -\frac{1}{R_{i+}}, -\frac{1}{R_{j+}}, -\frac{1}{R_{k+}} \right) \begin{pmatrix} V_{(i-1)} \\ V_{(j-1)} \\ V_{(k-1)} \\ V_{(i,j,k)} \\ V_{(i+1)} \\ V_{(j+1)} \\ V_{(k+1)} \end{pmatrix} = (0)$$

同様に解析領域の全てのコントロールボリュームに対して行列形式で方程式を立て、1つの巨大な係数行列 $A_{(n \times n)}$ を作り上げる。そして、最終的に解くべき方程式は次のよう表される。

$$A_{(n \times n)} \mathbf{V} = \mathbf{0}$$

ここで、上式の右辺は全ての成分が"0"のベクトルとなっているが、このままでは求める電位ベクトルも自明解の $\mathbf{V} = \mathbf{0}$ となって、何の解決にもならないので、代わりに電流（湧き出し）ベクトル $\mathbf{I} \neq \mathbf{0}$ を右辺におく。これが1つ目の境界条件となる。なお、解析領域全体における電流の湧き出しの総和がゼロとならなければ物理的に存在し得ない現象を解析する事となるので注意する必要がある。

また、2つ目の境界条件として電位の基準を定めなければならない。電流に直接関係するのは電位「差」であり、あくまでも隣同士のコントロールボリュームの電位の相対的な差である。従って、解析領域全体に 100[V] のオフセット電位があったとしても、電位「差」が正しく得られていれば数学的には前述の方程式は満たされ何ら問題は生じない。しかし、現実の物理現象は適当な基準電位の下、観測が行われるので、計算で生じた電位のオフセットを調整する必要がある。この2つ目の境界条件は、連立方程式の計算が終了した後に実施すれば良いものである。

余談であるが、コントロールボリューム内の中央電位の解が V_0 であるとした時、ジュール発熱によるエネルギー E は次のように表される。

$$E = \frac{(V_0 - V_{(i-1)})^2}{R_{i-}} + \frac{(V_0 - V_{(i+1)})^2}{R_{i+}} + \frac{(V_0 - V_{(j-1)})^2}{R_{j-}} + \frac{(V_0 - V_{(j+1)})^2}{R_{j+}} + \frac{(V_0 - V_{(k-1)})^2}{R_{k-}} + \frac{(V_0 - V_{(k+1)})^2}{R_{k+}}$$

ここで、中央電位 V_0 が δV 大きい場合、ジュール発熱の変化分 δE は次のように表される。

$$\delta E = E(V_0 + \delta V) - E(V_0)$$

上式の右辺の i 方向のみを具体的に記すと以下のようになる。

$$\begin{aligned} [\delta E]_i &= \frac{(V_0 + \delta V - V_{(i-1)})^2}{R_{i-}} + \frac{(V_0 + \delta V - V_{(i+1)})^2}{R_{i+}} - \frac{(V_0 - V_{(i-1)})^2}{R_{i-}} - \frac{(V_0 - V_{(i+1)})^2}{R_{i+}} \\ &= \frac{(V_0 - V_{(i-1)})^2 + 2\delta V(V_0 - V_{(i-1)}) + (\delta V)^2}{R_{i-}} - \frac{(V_0 - V_{(i-1)})^2}{R_{i-}} \\ &\quad + \frac{(V_0 - V_{(i+1)})^2 + 2\delta V(V_0 - V_{(i+1)}) + (\delta V)^2}{R_{i+}} - \frac{(V_0 - V_{(i+1)})^2}{R_{i+}} \\ &= \frac{2\delta V(V_0 - V_{(i-1)}) + (\delta V)^2}{R_{i-}} + \frac{2\delta V(V_0 - V_{(i+1)}) + (\delta V)^2}{R_{i+}} \\ &= 2\delta V \left\{ \frac{V_0 - V_{(i-1)}}{R_{i-}} + \frac{V_0 - V_{(i+1)}}{R_{i+}} \right\} + (\delta V)^2 \left\{ \frac{1}{R_{i-}} + \frac{1}{R_{i+}} \right\} \end{aligned}$$

同様に j, k 方向についても求め、全て足し合わせると次のようになる。

$$\begin{aligned} \delta E &= 2\delta V \left\{ \frac{V_0 - V_{(i-1)}}{R_{i-}} + \frac{V_0 - V_{(i+1)}}{R_{i+}} + \frac{V_0 - V_{(j-1)}}{R_{j-}} + \frac{V_0 - V_{(j+1)}}{R_{j+}} + \frac{V_0 - V_{(k-1)}}{R_{k-}} + \frac{V_0 - V_{(k+1)}}{R_{k+}} \right\} \\ &\quad + (\delta V)^2 \left\{ \frac{1}{R_{i-}} + \frac{1}{R_{i+}} + \frac{1}{R_{j-}} + \frac{1}{R_{j+}} + \frac{1}{R_{k-}} + \frac{1}{R_{k+}} \right\} \end{aligned}$$

上式右辺の δV が十分に小さいとして $(\delta V)^2$ を無視すると下式が導かれる。

$$\delta E \approx 2\delta V \left\{ \frac{V_0 - V_{(i-1)}}{R_{i-}} + \frac{V_0 - V_{(i+1)}}{R_{i+}} + \frac{V_0 - V_{(j-1)}}{R_{j-}} + \frac{V_0 - V_{(j+1)}}{R_{j+}} + \frac{V_0 - V_{(k-1)}}{R_{k-}} + \frac{V_0 - V_{(k+1)}}{R_{k+}} \right\}$$

この式に変分原理の考えを用いると右辺の中括弧内は"0"とならなければならない、下式の電流保存則と全く同じ式が成立しなければならない。

$$\frac{V_0 - V_{(i-1)}}{R_{i-}} + \frac{V_0 - V_{(i+1)}}{R_{i+}} + \frac{V_0 - V_{(j-1)}}{R_{j-}} + \frac{V_0 - V_{(j+1)}}{R_{j+}} + \frac{V_0 - V_{(k-1)}}{R_{k-}} + \frac{V_0 - V_{(k+1)}}{R_{k+}} = 0$$

変分原理の考え方は有限要素法で主に用いられるものであるが、このような形で有限体積法と理論的なつながりが生じる場合がある。

2. 2. 係数行列作成のための準備

前節では有限体積法の適用方法と計算内容について述べた。本節では係数行列全体の作成に必要な下準備について詳細を記す。本稿ではコントロールボリュームを立方体、解析領域を直方体（コントロールボリュームで割り切れるものとする）として考える。従って、各値を記憶するための三次元配列を用意した場合、それぞれの配列番号 $[n_x][n_y][n_z]$ と物理的な座標 (x,y,z) は直接一対一で対応させる事ができる。

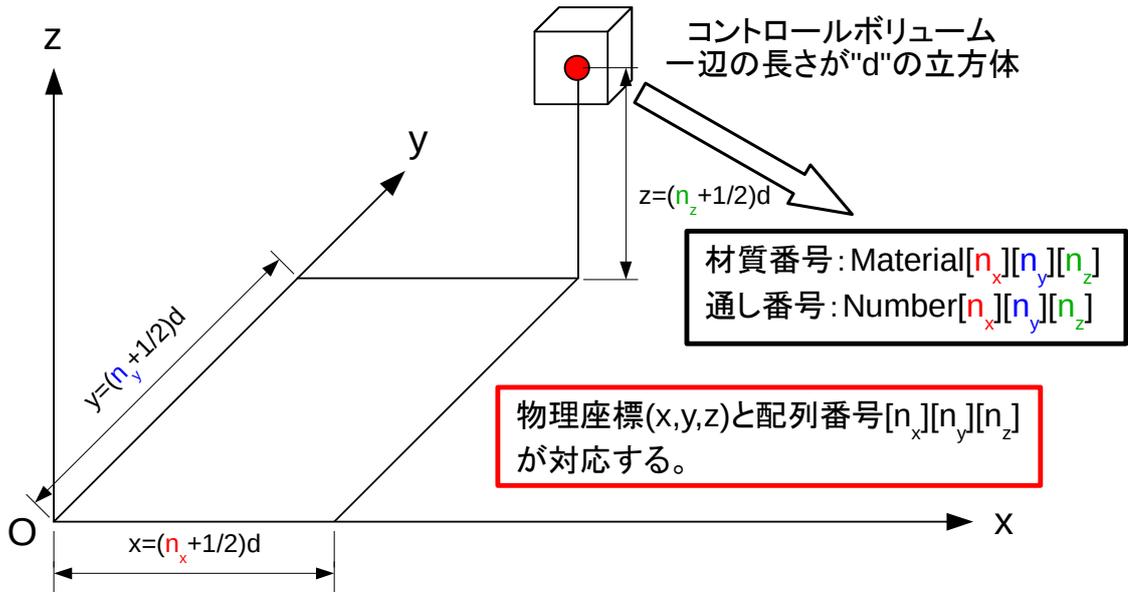


図 2. 3 係数行列作成のための材質番号と通し番号の設定

係数行列作成の前に準備する必要があるのは「材質番号（抵抗率と対応）」と「係数行列における通し番号」である。材質番号はコントロールボリューム内の抵抗率を参照する際に必要となる。また、係数行列における通し番号は、解析領域内における計算対象のコントロールボリューム全ての通し番号であり、これにより計算に必要な要素のみで係数行列を構成でき、行列計算の規模を小さくする事ができる。

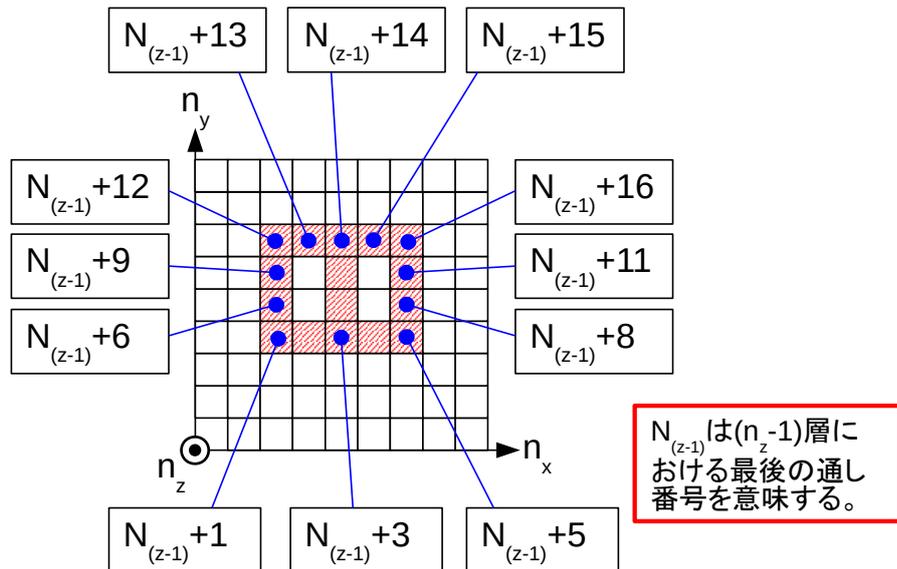


図 2. 4 通し番号の設定順序 (n_z 層の場合)

2. 3. 係数行列の作成と格納方法及び連立一次方程式の解法

係数行列の作成には、2. 1節で示した行列の成分を計算対象のコントロールボリューム全てに対して求める必要がある。

$$\left(-\frac{1}{R_{i-}}, -\frac{1}{R_{j-}}, -\frac{1}{R_{k-}}, \Sigma_{1/R}, -\frac{1}{R_{i+}}, -\frac{1}{R_{j+}}, -\frac{1}{R_{k+}} \right) \begin{pmatrix} V_{(i-1)} \\ V_{(j-1)} \\ V_{(k-1)} \\ V_{(i,j,k)} \\ V_{(i+1)} \\ V_{(j+1)} \\ V_{(k+1)} \end{pmatrix} = (I_{(i,j,k)})$$

$$\Sigma_{1/R} = \frac{1}{R_{i-}} + \frac{1}{R_{i+}} + \frac{1}{R_{j-}} + \frac{1}{R_{j+}} + \frac{1}{R_{k-}} + \frac{1}{R_{k+}}$$

まず、2. 2節において材質番号 $\text{Material}[\text{n}_x][\text{n}_y][\text{n}_z]$ と通し番号 $\text{Number}[\text{n}_x][\text{n}_y][\text{n}_z]$ について記したので、これを用いて対応する抵抗の値を求める。ここで、簡単のため $\text{Material}[\text{n}_x][\text{n}_y][\text{n}_z]$ に対応する抵抗率の値を $R(\text{Material}[\text{n}_x][\text{n}_y][\text{n}_z])$ とおき、 $\text{Material}[\text{n}_x][\text{n}_y][\text{n}_z]$ が "0" すなわち隣接するコントロールボリュームが存在しない場合（真空と同義）は $R(\text{Material}[\text{n}_x][\text{n}_y][\text{n}_z])$ を " ∞ " として扱う。（プログラムでは if 文処理によって演算の回避を行う）

$$R_{i-} = (1/2d) \{ R(\text{Material}[i-1][j][k]) + R(\text{Material}[i][j][k]) \}$$

$$R_{i+} = (1/2d) \{ R(\text{Material}[i][j][k]) + R(\text{Material}[i+1][j][k]) \}$$

$$R_{j-} = (1/2d) \{ R(\text{Material}[i][j-1][k]) + R(\text{Material}[i][j][k]) \}$$

$$R_{j+} = (1/2d) \{ R(\text{Material}[i][j][k]) + R(\text{Material}[i][j+1][k]) \}$$

$$R_{k-} = (1/2d) \{ R(\text{Material}[i][j][k-1]) + R(\text{Material}[i][j][k]) \}$$

$$R_{k+} = (1/2d) \{ R(\text{Material}[i][j][k]) + R(\text{Material}[i][j][k+1]) \}$$

以上から行列成分の計算に必要な抵抗値が求められる。なお、今回作成するプログラムにおいては係数行列の作成時に成分が発散する事を避けるため、完全導体の取り扱いを考慮しない。

最後に、行列の圧縮格納方法について記す。行列の圧縮格納方法には色々な手法があるが、本稿では単純に二次元配列の左側（列番号の小さい側）に非ゼロの成分を寄せて、その列番号を別の二次元配列に保存する方法を採用。列番号を別に記憶するので、元の行列を作成する時に成分が昇順である必要は無く、最後に $\Sigma_{1/R}$ を計算し、値を格納する事が可能となる。

具体的には、下図のように $n \times m (m \leq n)$ の double 型と int 型の二次元配列に行列の成分と本来の列番号を格納する。これにより元の行列 A の成分は double 型変数行列 B と int 型変数行列 C によって $a[i][c[i][j]] = b[i][j]$ と表される。

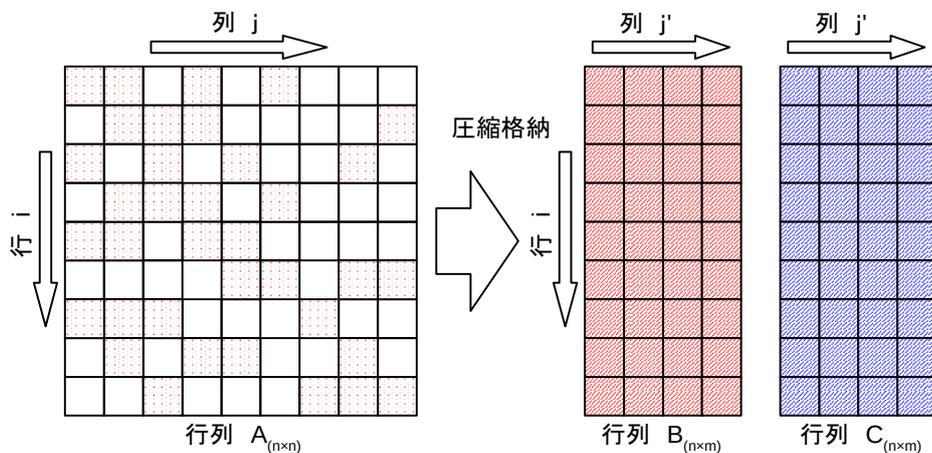


図 2. 5 行列の圧縮格納

double 型変数 1 つの大きさを B_D [byte]、int 型変数 1 つの大きさを B_I [byte] とおくと、この圧縮方法の場合、圧縮前と後の使用メモリは

前： $n \times n \times B_D$ [byte]

後： $n \times m \times B_D + n \times m \times B_I$ [byte]

となり列数 m が $m < \frac{n}{1 + (B_I/B_D)}$ を満たす範囲においては有効な圧縮方法となる。計算機環境にもよ

るが $B_D=8$ [byte], $B_I=4$ [byte] とすると、先の条件は $m < 2n/3$ となる。ただし、この行列圧縮法では行列 B, C から元の行列 A を復元する事は容易であるが、行列 A の i 行 j 列目を知るには行列 C の i 行目を走査する必要がある。なお、本プログラムでは $m=7$ となる。

そして、連立一次方程式の解法については、BiCG-STAB 法を用いる。この詳細については、自著「BiCG-STAB 法による連立一次方程式の計算関数の作成」を参照されたい。

3. 方法(Method)

前章で示した基礎理論を基に数値解析プログラムを具体的に作り上げる。

3. 1. 主な仕様

本プログラムを作成する上で軸となる事柄を下記に示す。

- ・三次元の計算プログラムで、複数の材質を扱う。
- ・球、円柱及び直方体等の基本的な形状を作成する関数を用意する。
- ・直流解析のみを扱う。
- ・確認用の材料モデル・電流モデルの出力を行う。
- ・設定・保守が容易である事。
- ・各種データをログファイルに出力する。

3. 2. グローバル変数・配列及び関数の定義

作成したプログラムを構成する関数を表 3. 1、表 3. 2、グローバル変数を表 3. 3 に示す。また、各関数の関係を図 3. 1 に示す。

表 3. 1 数値解析プログラムを構成する関数群 (1)

番号	関数宣言
1	int main(void)
基本関数	
2	void init_setting(void)
3	void resistivity_setting(void)
4	int serial_number_setting(void)
5	void model_output(void)
6	void matrix_making(void)
7	int current_check(int bn, double bERR)
8	void current_adjust(int bn, int mod)
9	void current_condition_output(void)
10	void M_V_product(int bn, double bx[], double by[])
11	int BiCG_STAB_solver(int bn, double bCOE, double bav[], double bbv[])
12	void voltage_adjust(int bn, int mod)
13	void voltage_output(void)
14	void current_output(void)

表3. 2 数値解析プログラムを構成する関数群 (2)

番号	関数宣言
材料モデル関数	
15	void solid_sphere_M(int num0,double bx0,double by0,double bz0,double br)
16	void solid_cylinder_M(int num0,double bx0,double by0,double bz0,double br,double bh)
17	void truncated_cone_M(int num0,double bx0,double by0,double bz0, double br0,double br1,double bh)
18	void rectangular_solid_M(int num0,double bx0,double by0,double bz0, double bx1,double by1,double bz1)
19	void H_shaped_glass_tube_M(int num0,double bx0,double by0,double bz0, double br,double bw,double bh,double bc)
電流モデル関数	
20	int solid_sphere_C(double bcur,double bx0,double by0,double bz0,double br)
21	int hollow_sphere_C(double bcur,double bx0,double by0,double bz0, double bri,double bdl)
22	int solid_cylinder_C(double bcur,double bx0,double by0,double bz0,double br,double bh)
23	int hollow_cylinder_C(double bcur,double bx0,double by0,double bz0, double bri,double bh,double bdl)
24	int rectangular_solid_C(double bcur,double bx0,double by0,double bz0, double bx1,double by1,double bz1)

表3. 3 グローバル変数

番号	変数名	役割
1	LL, MM, NN	解析領域の分割数
2	CC	行列圧縮係数(0.0<CC≤1.0)
3	SS	連立一次方程式の未知数の最大個数
4	RR	計算で取り扱う材料の数 真空 (抵抗率∞) と抵抗率が正の実数である材料の数
5	gdl	コントロールボリューム (立方体) の一辺の長さ
6	*fp	ログファイル用ファイルポインタ
7	mtr[][][]	(i,j,k)で位置が定まるコントロールボリュームの材質番号 res[mtr[][][]]はそのコントロールボリュームの抵抗率となる
8	num[][][]	(i,j,k)で位置が定まるコントロールボリュームの通し番号
9	cm[][]	係数行列の列番号格納用の int 型配列
10	bm[][]	係数行列の行列成分格納用の double 型配列
11	gc[]	電流の境界条件 (湧き出し電流) が格納される配列 連立一次方程式の右辺のベクトルに相当
12	gv[]	電位の計算結果が格納される配列 連立一次方程式の行列が掛けられる左辺のベクトルに相当
13	res[]	抵抗率の値が格納される配列(Ω m)
14	bro[], bri[], bvp[], bvs[], bvt[], bvv[], bvx[]	BiCG-STAB 法による反復演算に使用する配列

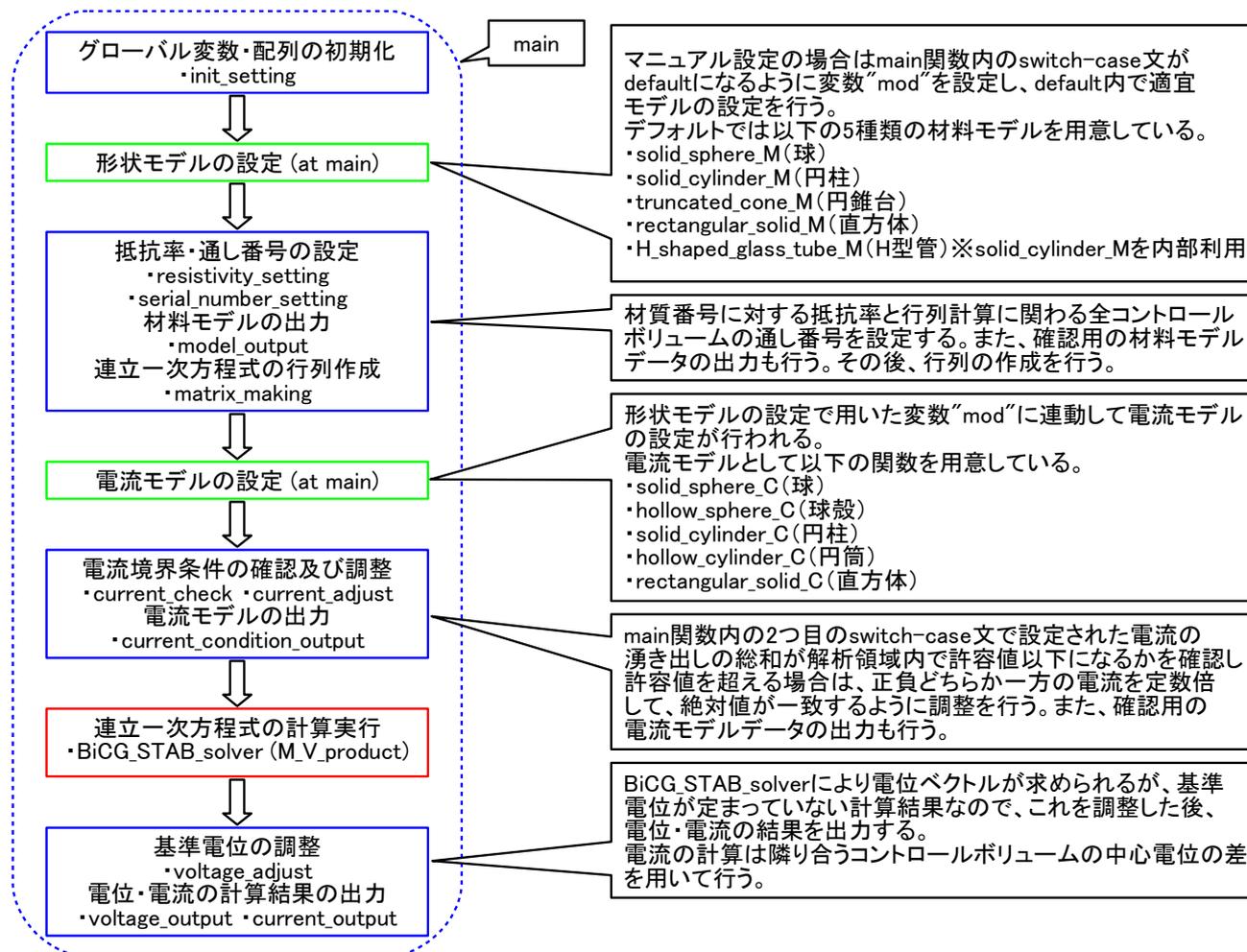


図 3. 1 各関数の関係

本プログラムは、開始と同時にログファイルの作成と関数 `init_setting` 内においてグローバル配列の初期化を行う。その後 `main` 関数内で材料モデルを作成し、材質番号に対応する抵抗率の設定と真空（材質番号"0"）以外の計算対象となるコントロールボリュームの通し番号を設定し、行列の作成を行う。この時、確認用のモデルデータの出力も行う。その後、電流の境界条件の設定を `main` 関数内で行い、境界条件の簡易なチェックと調整を行った後、BiCG-STAB法による連立一次方程式の計算が行われる。この計算ではコントロールボリュームの電位が求められるが、基準電位に対して自由度（オフセット電位）があるため（電流保存則の計算では電位そのものではなく電位差が用いられる）、設定された電位の境界条件を適用し、最終的な計算結果の調整を行う。そして最後に、電位差と抵抗値（抵抗率）によって計算される電流密度ベクトルが出力される。

3. 3. 材料モデル・電流モデル関数の説明

本プログラムでは、解析領域に材料モデルと電流モデルを設定するための基本的な形状関数を作成した。材料モデルについては、5つ、電流モデルについても5つである。材料モデルの設定では、解析領域の座標(x,y,z)に対応するコントロールボリュームの材質番号配列 $mtr[n_x][n_y][n_z]$ に整数値の材質番号を設定し、電流モデルの設定では同コントロールボリュームの通し番号 $num[n_x][n_y][n_z]$ をインデックスとする電流ベクトルの配列 $gc[num[n_x][n_y][n_z]]$ に電流の湧き出しを設定する。

関数名の最後に "_M" が付いているものが材料モデル関数で、 "_C" が付いているものが電流モデル関数である。引数の詳細については図3. 2、図3. 3に示す通りである。なお、材料モデル関数の "num0" は材質番号、電流モデル関数の "bcur" は合計湧き出し電流値である。

○材料モデル関数

- ・球体 "solid_sphere_M(num0, bx0, by0, bz0, br)" : 図3. 2(a)
- ・円柱 "solid_cylinder_M(num0, bx0, by0, bz0, br, bh)" : 図3. 2(c)
- ・円錐台 "truncated_cone_M(num0, bx0, by0, bz0, br0, br1, bh)" : 図3. 3(f)
- ・直方体 "rectangular_solid_M(num0, bx0, by0, bz0, bx1, by1, bz1)" : 図3. 2(e)
- ・H型管 "H_shaped_glass_tube_M(num0, bx0, by0, bz0, br, bw, bh, bc)" : 図3. 3(g)

○電流モデル関数

- ・球体 "solid_sphere_C(bcur, bx0, by0, bz0, br)" : 図3. 2(a)
- ・球殻 "hollow_sphere_C(bcur, bx0, by0, bz0, bri, bdl)" : 図3. 2(b)
- ・円柱 "solid_cylinder_C(bcur, bx0, by0, bz0, br, bh)" : 図3. 2(c)
- ・円筒 "hollow_cylinder_C(bcur, bx0, by0, bz0, bri, bh, bdl)" : 図3. 2(d)
- ・直方体 "rectangular_solid_C(bcur, bx0, by0, bz0, bx1, by1, bz1)" : 図3. 2(e)

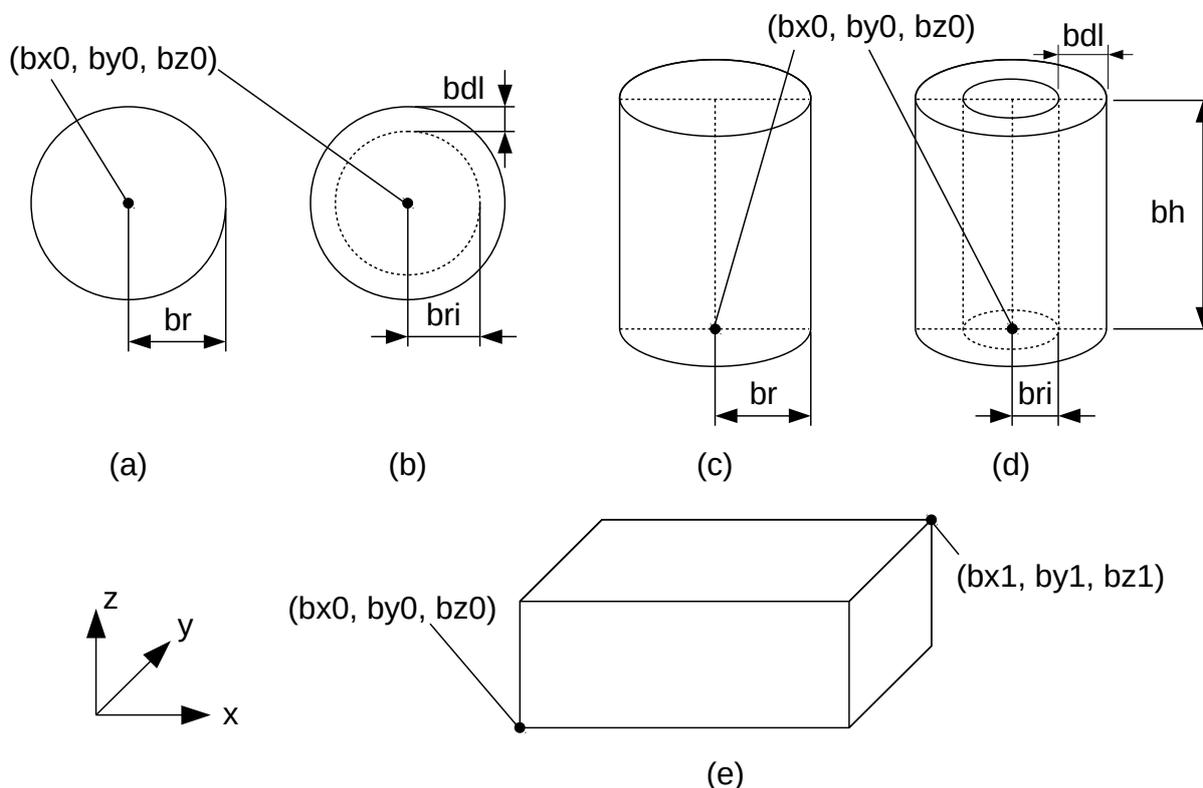


図3. 2 材料モデル・電流モデル関数の引数と対応箇所

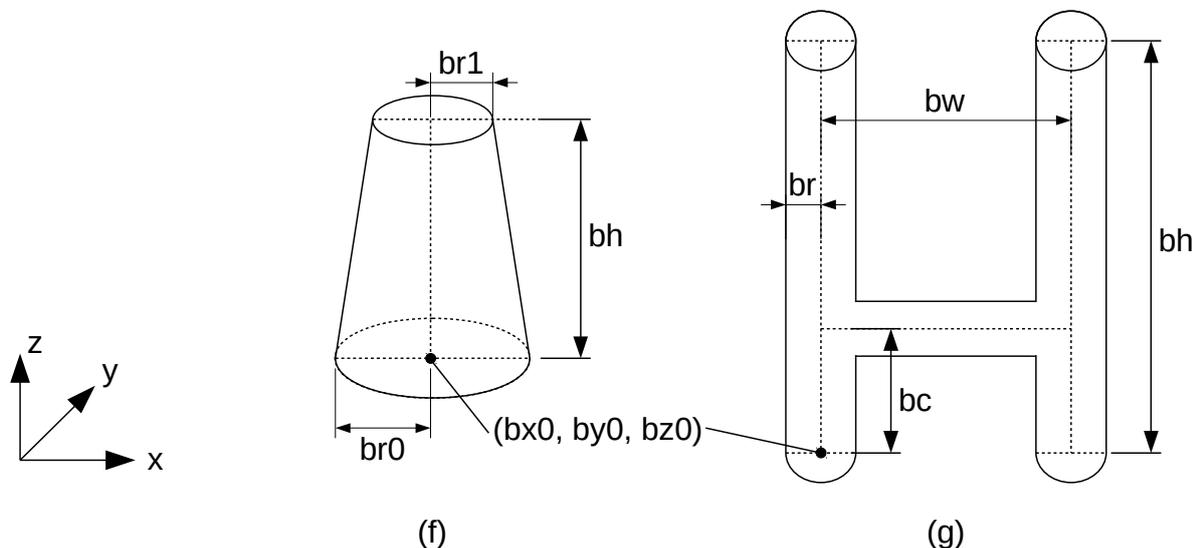


図 3. 3 材料モデル関数の引数と対応箇所

3. 4. 各関数の詳細説明

各関数の仕様を以下に示す。

関数名	main
役割	プログラムの全体の流れを制御する。
引数	なし
返却値	"0"または"-1"
参照する変数	LL, MM, NN, CC, SS, gdl
書換える変数	fp
備考	ログファイルの作成・終了を行う。 ログファイルへの書き込みあり。 通し番号（計算に必要な行列の規模）が大きすぎる場合、演算を行わずに終了する。

関数名	init_setting
役割	グローバル変数の初期化を行う。
引数	なし
返却値	なし
参照する変数	LL, MM, NN, SS, RR
書換える変数	mtr[][][], num[][][], bm[][], cm[][], gc[], gv[], res[], bro[], bri[], bvp[], bvs[], bvt[], bvv[], bvx[]
備考	ログファイルへの書き込みあり。 "num[][][]"と"cm[][][]"については"-1"を設定する。

関数名	resistivity_setting
役割	材質番号に対応する抵抗率の設定を行う。
引数	なし
返却値	なし
参照する変数	RR
書換える変数	res[]
備考	ログファイルへの書き込みあり。

関数名	serial_number_setting
役割	計算対象となっているコントロールボリュームに通し番号を設定する。
引数	なし
返却値	"計算対象となっているコントロールボリュームの数"または"-1"
参照する変数	LL, MM, NN, SS, mtr[][][],
書換える変数	num[][][]
備考	ログファイルへの書き込みあり。 始めに設定した配列が行列作成において不足となる時、"-1"を返却する。

関数名	model_output
役割	材料モデル（抵抗率）の出力を行う。
引数	なし
返却値	なし
参照する変数	LL, MM, NN, gdl, mtr[][][], res[]
書換える変数	なし
備考	ログファイルへの書き込みあり。 "material_model.csv"を出力する。

関数名	matrix_making
役割	係数行列の作成を行う。
引数	なし
返却値	なし
参照する変数	LL, MM, NN, gdl, mtr[][][], num[][][], res[]
書換える変数	bm[][], cm[][]
備考	ログファイルへの書き込みあり。

関数名	current_check
役割	解析領域内における電流の湧き出しの総和が許容値以下になるか判定する。
引数	bn : 計算対象となっているコントロールボリュームの数。 bERR : 許容値。
返却値	"0"または"-1"
参照する変数	gc[]
書換える変数	なし
備考	ログファイルへの書き込みあり。 許容値より大きい場合は"-1"が返却される。

関数名	current_adjust
役割	解析領域内における電流の湧き出しの総和が"0"となるように調整する。
引数	bn : 計算対象となっているコントロールボリュームの数。 mod : モード設定。
返却値	なし
参照する変数	gc[]
書換える変数	gc[]
備考	ログファイルへの書き込みあり。 モード設定の値と動作は下記の通り。 1 : 負の電流の湧き出しの合計の絶対値が正のそれに等しくなるように調整。 2 : 正の電流の湧き出しの合計の絶対値が負のそれに等しくなるように調整。

関数名	current_condition_output
役割	電流湧き出しの境界条件（形状）を出力する。
引数	なし
返却値	なし
参照する変数	LL, MM, NN, gdl, mtr[][][], num[][][], gc[]
書換える変数	なし
備考	ログファイルへの書き込みあり。 "current_condition.csv"を出力する。

関数名	M_V_product
役割	係数行列とベクトルの積を行う。
引数	bn : 計算対象となっているコントロールボリュームの数。 bx[] : 行列が掛けられるベクトルが格納されている一次元配列。 by[] : 計算結果が格納される一次元配列。
返却値	なし
参照する変数	bm[][], cm[][]
書換える変数	なし
備考	特になし。

関数名	BiCG_STAB_solver
役割	BiCG_STAB法を用いた連立一次方程式の演算を行う。
引数	bn : 計算対象となっているコントロールボリュームの数。 bCOE : 反復演算停止条件。 bav[] : 方程式の右辺のベクトル（電流ベクトル）の成分が格納されている一次元配列。 bbv[] : 解ベクトル（電位ベクトル）の成分が格納される一次元配列。
返却値	反復回数
参照する変数	なし
書換える変数	bro[], bri[], bvp[], bvs[], bvt[], bvv[], bvx[]
備考	ログファイルへの書き込みあり。 "M_V_product"を逐次呼び出し、行列とベクトルの積を行う。 詳細は自著「BiCG-STAB法による連立一次方程式の計算関数の作成」を参照の事。

関数名	voltage_adjust
役割	計算結果として得られた電位ベクトルの基準電位の調整を行う。
引数	bn : 計算対象となっているコントロールボリュームの数。 mod : モード設定。
返却値	なし
参照する変数	gv[]
書換える変数	gv[]
備考	ログファイルへの書き込みあり。 モード設定の値と動作は下記の通り。 0 : 最大電位と最小電位の中間が 0[V]となるように調整。 1 : 最小電位が 0[V]となるように調整。 2 : 最大電位が 0[V]となるように調整。

関数名	voltage_output
役割	コントロールボリュームの電位を出力する。
引数	なし
返却値	なし
参照する変数	LL, MM, NN, gdl, mtr[][][], num[][][], gv[]
書換える変数	なし
備考	ログファイルへの書き込みあり。 "voltage.csv"を出力する。

関数名	current_output
役割	コントロールボリューム間の電位差と抵抗率から電流密度ベクトルの計算と出力を行う。
引数	なし
返却値	なし
参照する変数	LL, MM, NN, gdl, mtr[][][], num[][][], res[], gv[]
書換える変数	なし
備考	ログファイルへの書き込みあり。 "current.csv"を出力する。

関数名	solid_sphere_M
役割	球の材料モデルを設定する。
引数	num0 : 材質番号。 bx0, by0, bz0 : 球の中心座標。 br : 球の半径。
返却値	なし
参照する変数	LL, MM, NN, gdl
書換える変数	mtr[][][]
備考	ログファイルへの書き込みあり。

関数名	solid_cylinder_M
役割	円柱の材料モデルを設定する。
引数	num0 : 材質番号。 bx0, by0, bz0 : 円柱の底面の中心座標。 br : 円柱の半径。 bh : 円柱の高さ。
返却値	なし
参照する変数	LL, MM, NN, gdl
書換える変数	mtr[][][]
備考	ログファイルへの書き込みあり。

関数名	truncated_cone_M
役割	円錐台の材料モデルを設定する。
引数	num0 : 材質番号。 bx0, by0, bz0 : 底面の中心座標。 br0 : 底面の半径。 br1 : 上面の半径。 bh : 円錐台の高さ。
返却値	なし
参照する変数	LL, MM, NN, gdl
書換える変数	mtr[][][]
備考	ログファイルへの書き込みあり。

関数名	rectangular_solid_M
役割	直方体の材料モデルを設定する。
引数	num0 : 材質番号。 bx0, by0, bz0 : 直方体の頂点の座標 1。 bx1, by1, bz1 : 直方体の頂点の座標 2。
返却値	なし
参照する変数	LL, MM, NN, gdl
書換える変数	mtr[][][]
備考	ログファイルへの書き込みあり。

関数名	H_shaped_glass_tube_M
役割	H型管の材料モデルを設定する。
引数	num0 : 材質番号。 bx0, by0, bz0 : H型管のベース位置。 br : 管の半径。 bw : H型管の幅。 bh : H型管の高さ。 bc : コネクションチューブのベース位置からの高さ。
返却値	なし
参照する変数	LL, MM, NN, gdl
書換える変数	mtr[][][]
備考	ログファイルへの書き込みあり。 "solid_cylinder_M"に適切な値を渡し、H型管の2本の立管を作成する。

関数名	solid_sphere_C
役割	球状の領域内に電流の湧き出しを設定する。
引数	bcur : 総湧き出し電流。 bx0, by0, bz0 : 球の中心座標。 br : 球の半径。
返却値	電流の湧き出しが設定されたコントロールボリュームの数
参照する変数	LL, MM, NN, gdl, mtr[][][], num[][][]
書換える変数	gc[]
備考	ログファイルへの書き込みあり。

関数名	hollow_sphere_C
役割	球殻状の領域内に電流の湧き出しを設定する。
引数	bcur : 総湧き出し電流。 bx0, by0, bz0 : 球殻の中心座標。 bri : 球殻の内径。 bdl : 球殻の厚み。
返却値	電流の湧き出しが設定されたコントロールボリュームの数
参照する変数	LL, MM, NN, gdl, mtr[][][], num[][][]
書換える変数	gc[]
備考	ログファイルへの書き込みあり。

関数名	solid_cylinder_C
役割	円柱状の領域内に電流の湧き出しを設定する。
引数	bcur : 総湧き出し電流。 bx0, by0, bz0 : 円柱の底面の中心座標。 br : 円柱の半径。 bh : 円柱の高さ。
返却値	電流の湧き出しが設定されたコントロールボリュームの数
参照する変数	LL, MM, NN, gdl, mtr[][][], num[][][]
書換える変数	gc[]
備考	ログファイルへの書き込みあり。

関数名	hollow_cylinder_C
役割	円筒状の領域内に電流の湧き出しを設定する。
引数	bcur : 総湧き出し電流。 bx0, by0, bz0 : 円柱とみなした時の底面の中心座標。 bri : 円筒の内径。 bh : 円筒の高さ。 bdl : 円筒の厚み。
返却値	電流の湧き出しが設定されたコントロールボリュームの数
参照する変数	LL, MM, NN, gdl, mtr[][][], num[][][]
書換える変数	gc[]
備考	ログファイルへの書き込みあり。

関数名	rectangular_solid_C
役割	直方体の領域内に電流の湧き出しを設定する。
引数	bcur : 総湧き出し電流。 bx0, by0, bz0 : 直方体の頂点の座標 1。 bx1, by1, bz1 : 直方体の頂点の座標 2。
返却値	電流の湧き出しが設定されたコントロールボリュームの数
参照する変数	LL, MM, NN, gdl, mtr[][][], num[][][]
書換える変数	gc[]
備考	ログファイルへの書き込みあり。

4. 結果(Results)

前章で作成したプログラムの実行結果を示す。

4. 1. 球型抵抗体

解析領域に半径 50[mm]の球型抵抗体を作り、その中心に半径 5[mm]の球型の電流の湧き出しと厚さ 5[mm]の球殻型の電流の吸い込みを設置した。半径が 5~45[mm]の間は電流の湧き出しが無く、電位・電流の大きさは次のように表す事ができる。

$$\text{半径 } r_i \text{ から半径 } r_o (r_i < r_o) \text{ の間の球殻部分の抵抗値} : R_{r_i-r_o} = \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_o} \right)$$

$$\text{半径 } r (r_i < r < r_o) \text{ における電位} : V(r) = I_{all} R_{r-r_o} = \frac{\rho I_{all}}{4\pi} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_o} \right)$$

$$\text{半径 } r (r_i < r < r_o) \text{ における電流密度} : i(r) = \frac{I_{all}}{4\pi r^2}$$

計算条件

- LL, MM, NN=120, CC=0.65, gdl=1.0×10⁻³
- 抵抗率 : 2.0×10⁻¹[Ωm] (海水の抵抗率に近い)
- 電流 : 30[A]
- BICG-STAB 反復回数/残差 : 152/-2.6294×10⁻¹¹

結果は次の図に示す通りほぼ、理論解と一致しており、作成したプログラムが正しく機能している事が分かる。

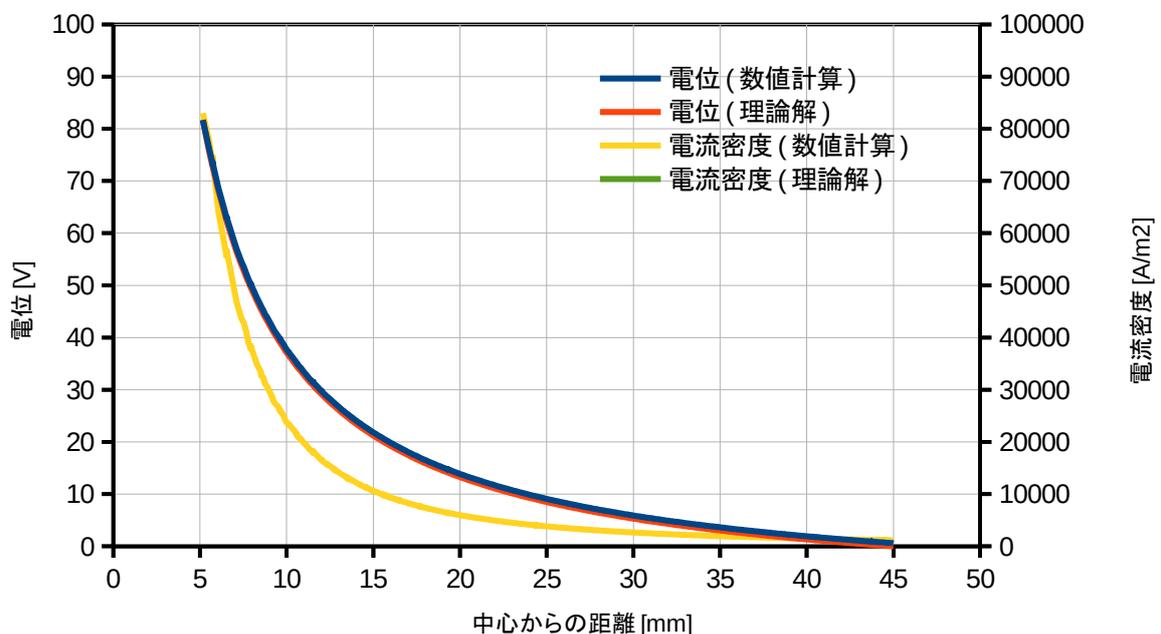


図 4. 1 電位・電流密度の比較 (球型抵抗体)

4. 2. 円柱型抵抗体

解析領域に半径 40[mm]、高さ 30[mm]の円柱型抵抗体を作り、その中心に半径 5[mm]の円柱型の電流の湧き出しと厚さ 5[mm]の円筒型の電流の吸い込みを設置した。半径が 5~35[mm]の間は電流の湧き出しが無く、電位・電流の大きさは次のように表す事ができる。

$$\text{半径 } r_i \text{ から半径 } r_o (r_o > r_i) \text{ の間の円筒部分の抵抗値} : R_{r_i-r_o} = \frac{\rho}{2\pi H} \ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)$$

$$\text{半径 } r (r < r_o) \text{ における電位} : V(r) = I_{all} R_{r-r_o} = \frac{\rho I_{all}}{2\pi H} \ln\left(\frac{r_o}{r}\right)$$

$$\text{半径 } r (r < r_o) \text{ における電流密度} : i(r) = \frac{I_{all}}{2\pi H r}$$

計算条件

- LL, MM, NN=120, CC=0.65, gdl=1.0×10⁻³
- 抵抗率 : 2.0×10⁻¹[Ωm] (海水の抵抗率に近い)
- 電流 : 20[A]
- BiCG-STAB 反復回数/残差 : 110/9.5182×10⁻⁹

結果は次の図に示す通りほぼ、理論解と一致しており、作成したプログラムが正しく機能している事が分かる。ただし、中心の電流の湧き出し部分に近い所では若干の歪が見られる。

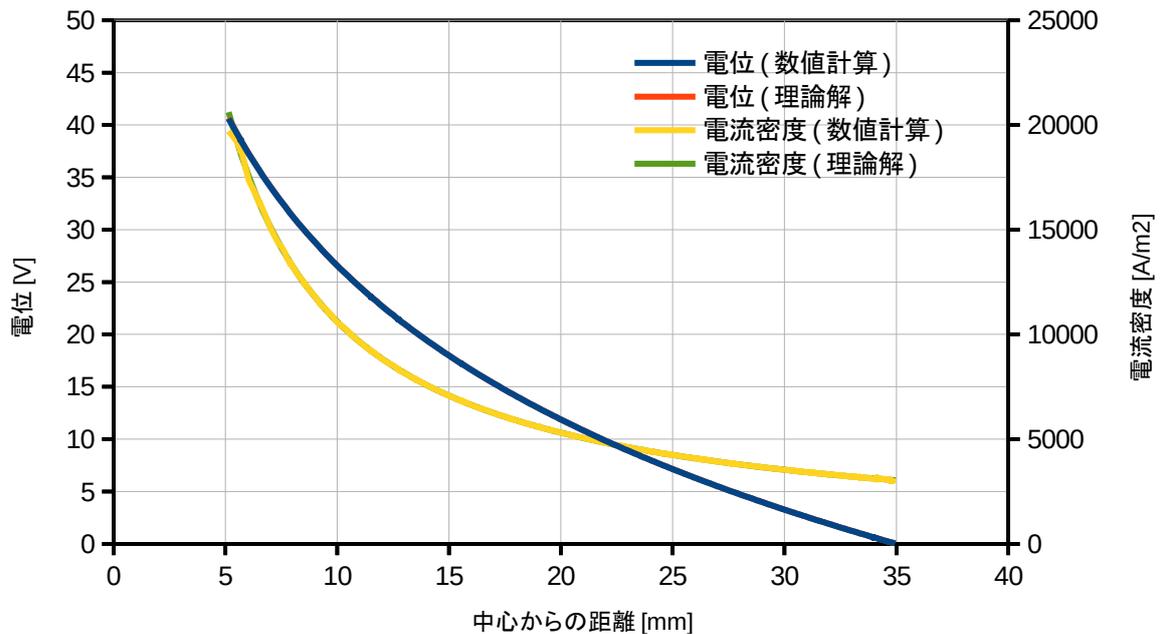


図 4. 2 電位・電流密度の比較 (円柱型抵抗体)

4. 3. 円錐台型抵抗体

解析領域に底面の半径が 30[mm]、上面の半径が 10[mm]、高さが 50[mm]の円錐台型抵抗体を作り、底面に電流の湧き出し、上面に電流の吸い込みを設置した。この抵抗体の底面と上面の抵抗値は近似的に以下の手順によって求められる。

$$\begin{aligned} \text{座標 } z \text{ における断面の半径} & : r(z) = az + b \\ \text{座標 } z \text{ における抵抗片の抵抗値} & : dr(z) = \frac{\rho}{\pi \{r(z)\}^2} dz = \frac{\rho}{\pi (az + b)^2} dz \\ \text{円錐台型抵抗体の抵抗値} & : R = \int_{z_b}^{z_t} dr(z) = \int_{z_b}^{z_t} \frac{\rho}{\pi (az + b)^2} dz = \frac{\rho}{\pi a} \left[\frac{1}{az + b} \right]_{z_t}^{z_b} \end{aligned}$$

計算条件

- LL, MM, NN=120, CC=0.65, gdl=1.0×10⁻³
- 抵抗率 : 1.64×10⁻⁵[Ωm] (炭素の抵抗率に近い)
- 電流 : 100[mA]
- BiCG-STAB 反復回数/残差 : 125/8.8846×10⁻⁹

本解析の場合、半径は r(z)=-0.4z+0.03[m]と表されるので、求める抵抗値は 500ρ/3π[Ω]となり、数値で表すと 8.7×10⁻⁴[Ω]となる。従って、100[mA]の電流が流れた時の、底面と上面の電位差は 8.7×10⁻⁵[V]となる。本プログラムの結果では 9.32×10⁻⁵[V]となり、大きく外れた値にはならなかった。

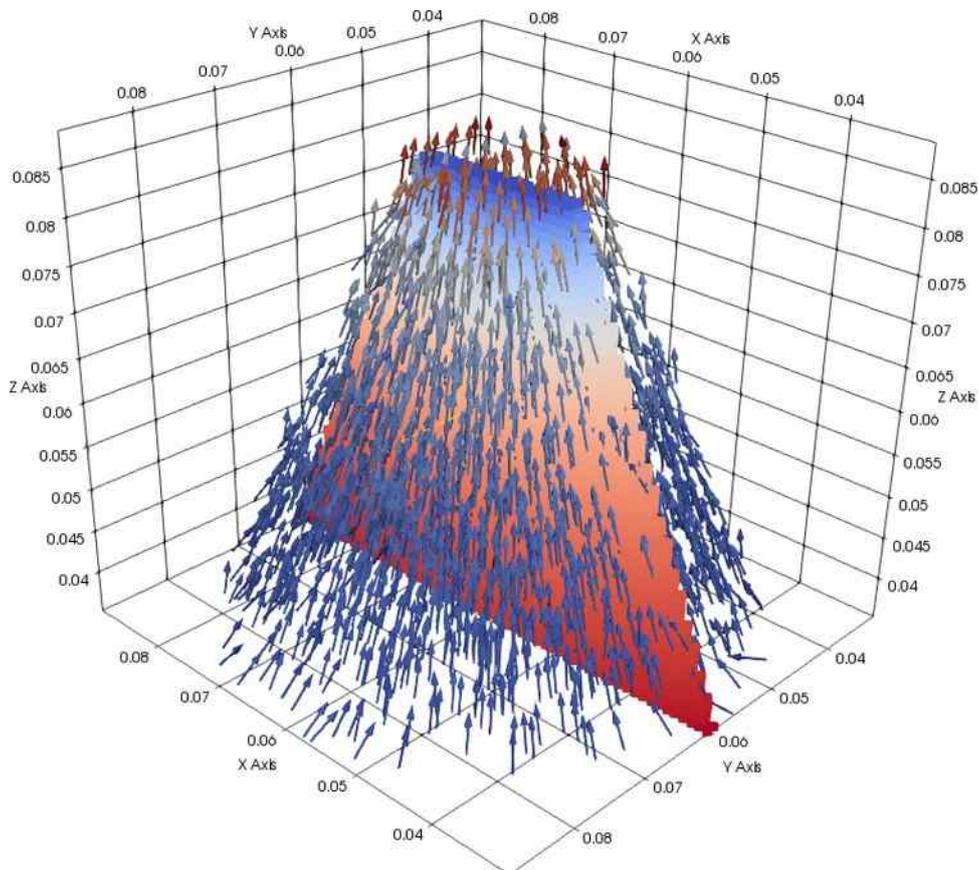


図 4. 3 電位・電流密度の様相 (円錐台型抵抗体)

4. 4. 直列抵抗体

解析領域に断面が40[mm]×60[mm]で、長さが30[mm]の抵抗体1と50[mm]の抵抗体2を直列につなげたものを設置し、最下面（抵抗体1の下面）に電流の湧き出しを、最上面（抵抗体2の上面）に電流の吸い込みを設置した。

計算条件

- LL, MM, NN=120, CC=0.65, gdl=1.0×10⁻³
- 抵抗率（抵抗体1） : 1.50×10⁻⁶[Ωm]（ニクロムの抵抗率に近い）
- 抵抗率（抵抗体2） : 1.68×10⁻⁸[Ωm]（銅の抵抗率に近い）
- 電流 : 20[A]
- BiCG-STAB 反復回数／残差 : 598／9.6087×10⁻⁹

本解析の場合、断面積は2.4×10⁻³[m²]なので、電流密度は8.3×10³[A/m²]となり、本プログラムで得られた計算結果も同じ値であった。また電位についても理論解とほぼ同じ結果が得られた。

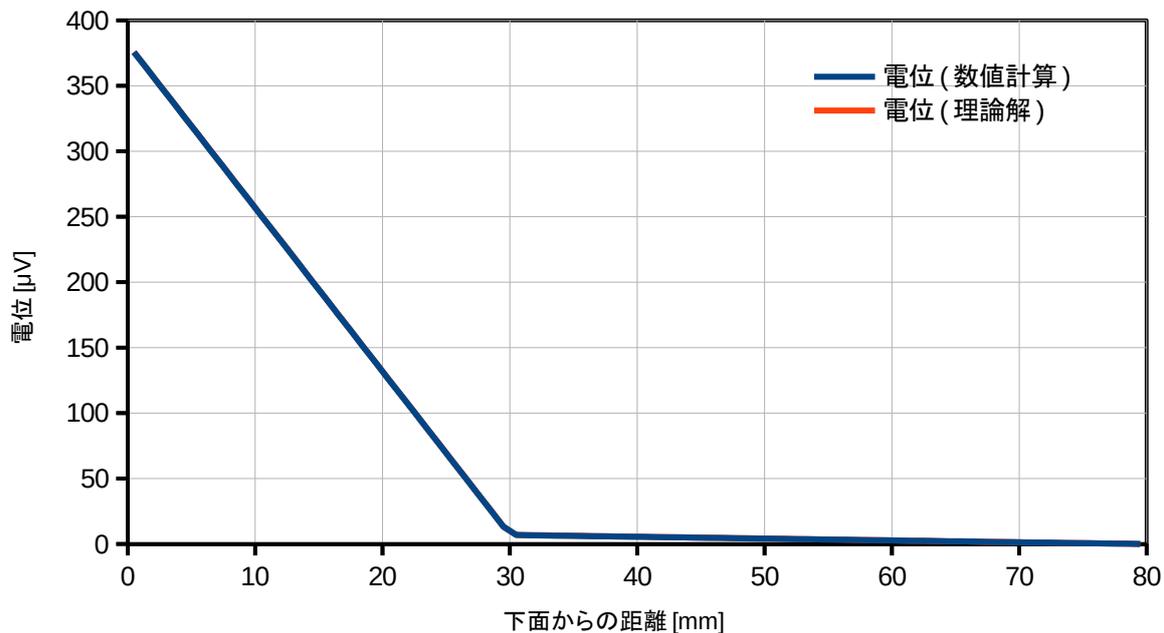


図 4. 4 電位の比較（直列抵抗体）

4. 5. 内部電極を持つ球型抵抗体

解析領域に半径 50[mm]の球型抵抗体を作り、その中心から 20[mm]離れた位置に半径 8[mm]の球型の電流の湧き出しと同軸上の正反対の位置に同様の電流の吸い込みを設置した。

計算条件

- LL, MM, NN=120, CC=0.65, gdl=1.0×10⁻³
- 抵抗率 : 3.97×10³[Ωm] (ケイ素の抵抗率に近い)
- 電流 : 150[μA]
- BiCG-STAB 反復回数/残差 : 124/7.3945×10⁻⁹

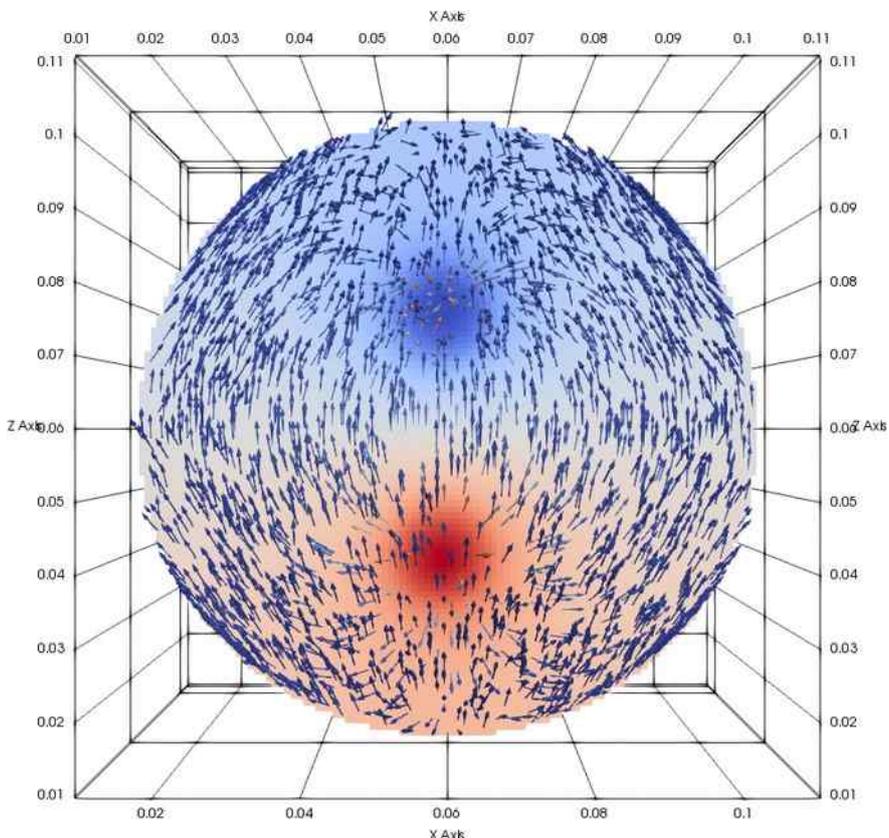


図 4. 5 電位・電流密度の様相 X-Z 平面 (球型抵抗体)

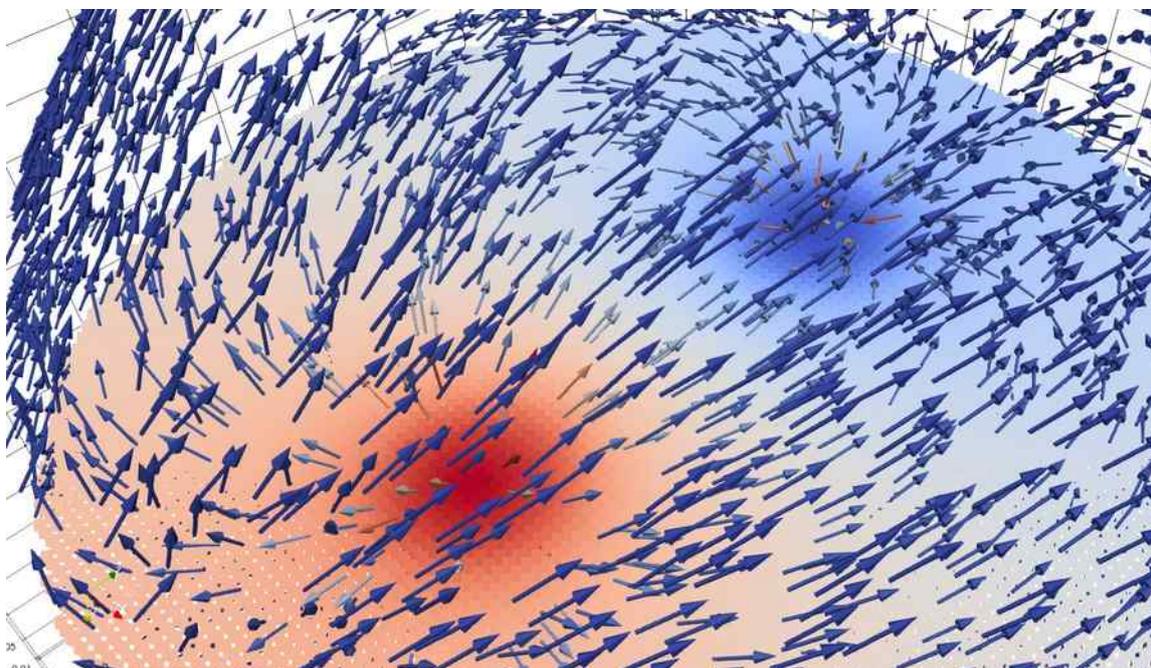


図 4. 6 電位・電流密度の様相拡大 (球型抵抗体)

4. 6. H型管による水の電気分解

解析領域にH型管とその内部に電流の湧き出し・吸い込みを設置した。このモデルの場合、連絡管の断面積は $25\pi \times 10^{-6} [\text{m}^2]$ なので、電流密度は $1.018 \times 10^3 [\text{A}/\text{m}^2]$ となるはずである。解析の結果は $1.0 \times 10^3 [\text{A}/\text{m}^2]$ であったので、本解析は妥当なものであると考えられる。

計算条件

- LL, MM, NN=120, CC=0.65, gdl= 1.0×10^{-3}
- 抵抗率 : $2.0 \times 10^{-1} [\Omega\text{m}]$ (海水の抵抗率に近い)
- 電流 : 80[mA]
- BiCG-STAB 反復回数/残差 : 181/ 8.3107×10^{-9}
- ベース位置(bx0,by0,bz0) : (35[mm], 60[mm], 20[mm])
- 管の半径 : 5[mm]
- H型管の幅/高さ : 50[mm]/80[mm]
- 連絡管の位置 : 25[mm]

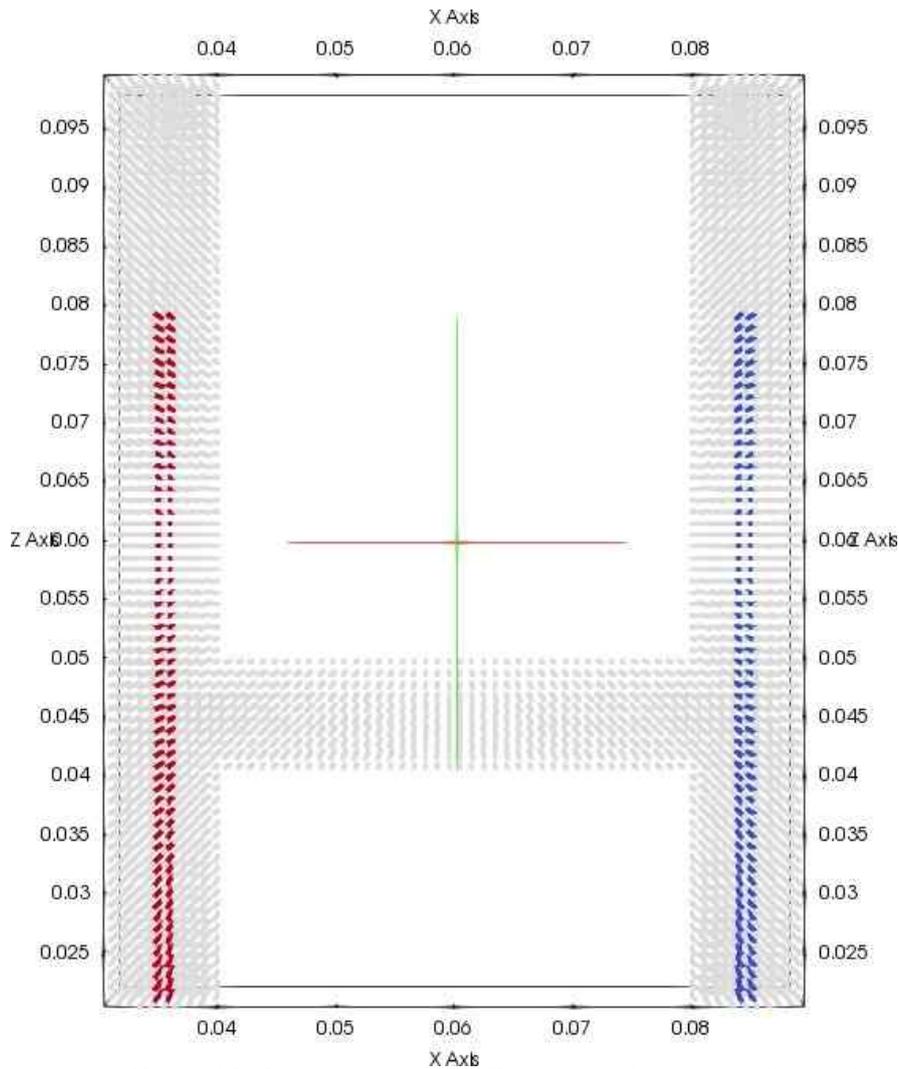


図4. 7 電流の湧き出し（赤色部）・吸い込み（青色部）の設定条件（H型管）

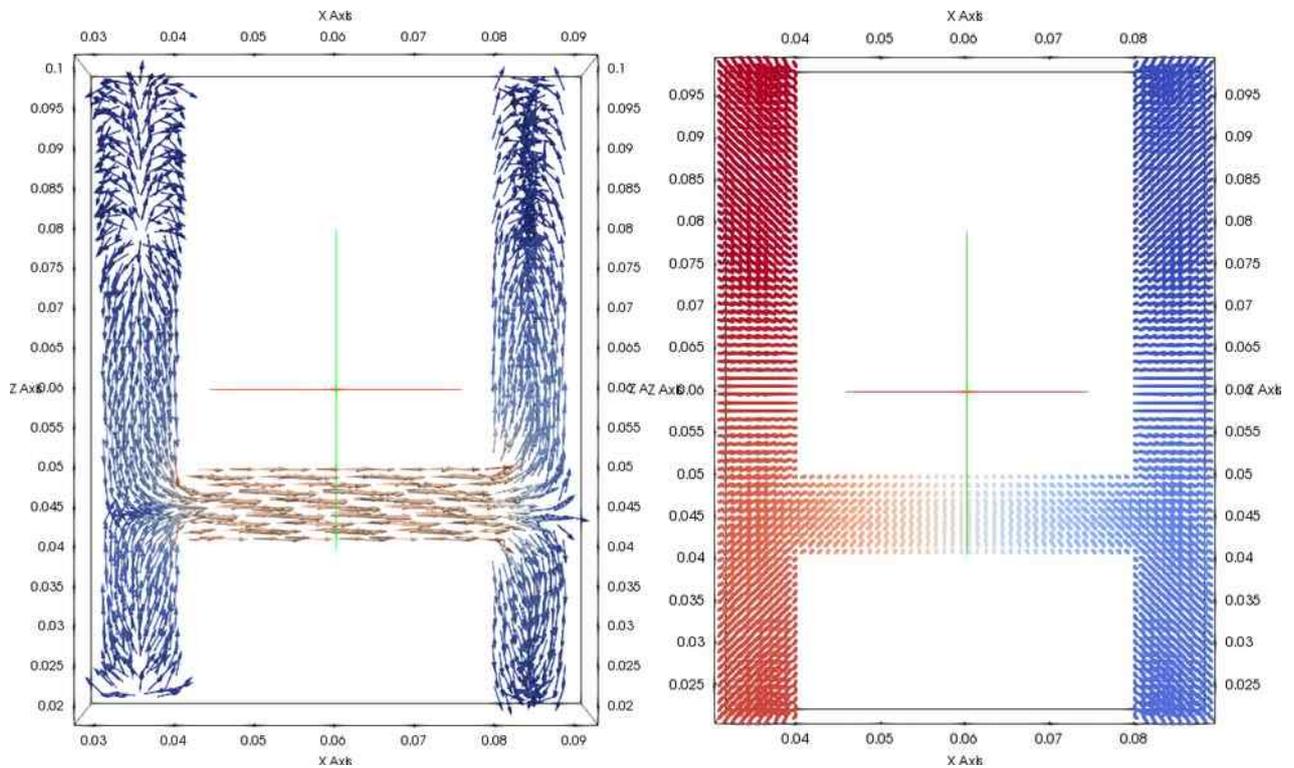


図4. 8 電流（左図）と電位（右図）の様相（H型管）

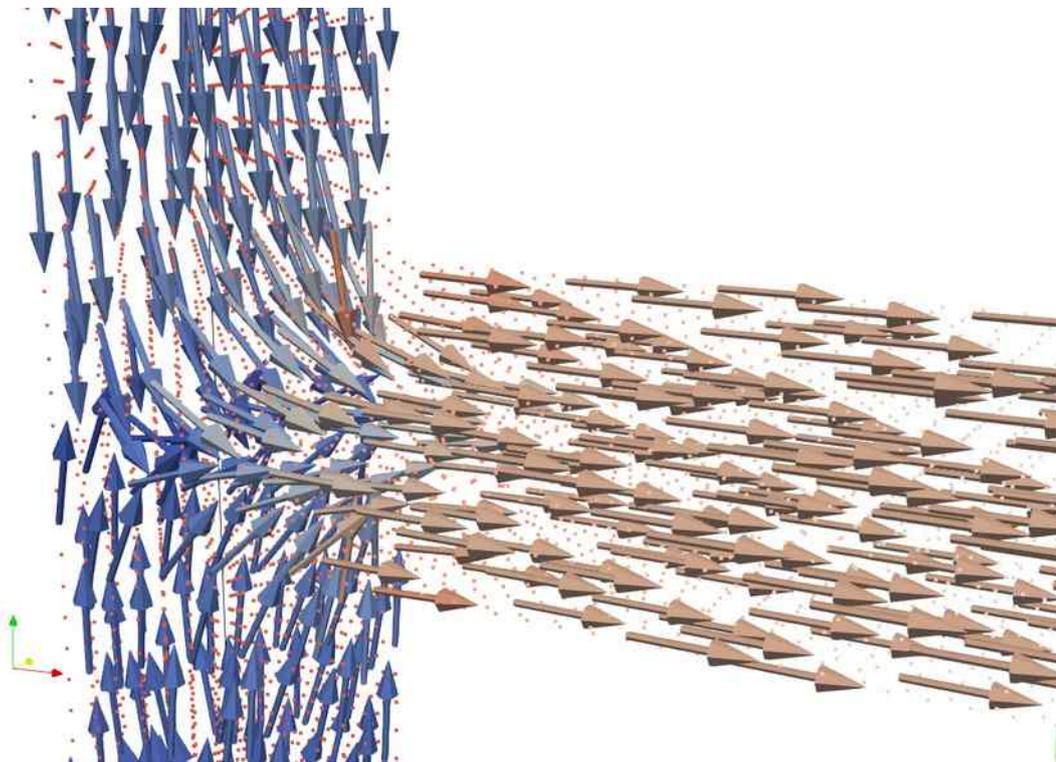


図4. 9 電位・電流密度の様相（H型管）

5. 考察(Discussion)

まず、理論解の存在する基本的な形状の抵抗体について電位・電流の解析を行い、妥当な計算結果が出力される事を確認した。そして、複雑な形状の問題に対しても大方正しい動作をする事も確認できた。しかし、本来であれば、H型管を用いた電気分解の問題については、直接液体に電流の湧き出しを設定するのではなく、金属製の電極を挿入して、それぞれの下面を電流の湧き出し・吸い込みとしたかったが、計算が収束せず、正しい結果が得られなかった。これは抵抗率の差があまりにも大きく、係数行列の性質が悪化したためと考えられる。従って、どのような材料の組み合わせに対しても、有効な計算が実行可能である保証はなく、問題によっては適宜設定条件を変更する必要がある。

6. 結言(Summary)

今回は差分法を用いた解析（自著「差分法を用いた二次元電位分布解析」参照）を行ったが、今回は三次元かつ異種材料混在の解析を行った。これはかなりの躍進であると思われるが、まだ改善の余地もある。当分の間は、今回作成したプログラムを用いて色々な解析を行っていきたいと思う。

7. 文献(References)

- [1] : 物理入門コース3 電磁気学 I 電場と磁場 長岡洋介著 岩波書店
- [2] : C言語による数値計算入門 皆本晃弥著 サイエンス社
- [3] : 変分法 緒方秀教著 コロナ社
- [4] : 有限要素法入門 改訂版 三好俊朗著 培風館
- [5] : https://en.wikipedia.org/wiki/Finite_volume_method

8. 著者(Author)

氏名：志多 友史（工学修士）

略歴：

2011年：下位国立大学 工学部電気系学科卒業

2013年：同大学大学院 工学研究科修了

2013年：研究開発機関へ就職

興味：物理・数学・コンピュータ・電気電子工作

9. 備考(Notes)

特になし。