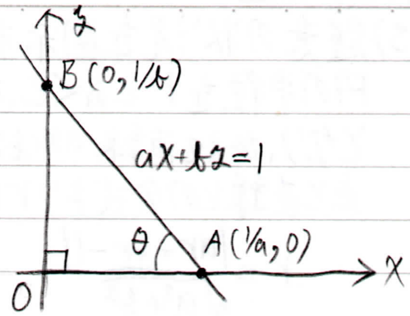
必須問題

I.(1) 題意の状況を図示すると右のようになる。



線分ABの長さを求めると次のようになる。

$$\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$$

従ってcosθは次のように表される。

$$\cos\theta=\left(\frac{1}{a}\right)\Big/\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\right)=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad — ①$$

これより $\cos\theta<1/3$ となる a, b は以下の条件を満たす必要がある。

$$\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}<\frac{1}{3}\cdots 8b^2<a^2 \quad — ②$$

②式を満たす (a, b) を求めると以下の5通りとなる。

$(3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1), (6, 2)$

以上から $\cos\theta<1/3$ となる確率は次のようになる。

$5/36$ //

I.(2) 与式を変形すると以下のようになる。

$$2\sin\theta\cos\theta=2\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2ab}{a^2+b^2} \quad — ③$$

③式が整数となるには(分子)≧(分母)である必要があり、不等式を立て整理すると以下のようになる。

$$2ab\geqq a^2+b^2\cdots a^2-2ab+b^2\leqq 0\cdots(a-b)^2\leqq 0 \quad — ④$$

$(a-b)^2$ はゼロ未満にはなり得ないので④式を満たすためには $a=b$ である必要がある。これを満たす (a, b) は、$(1, 1), (2, 2)\cdots, (6, 6)$ の6通りなので $2\sin\theta\cos\theta$ が整数となる確率は次のようになる。

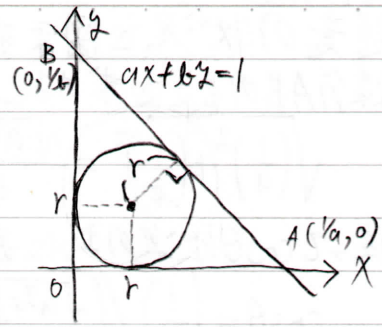
$1/6$ // $(\because 6/36)$

なお $a=b$ の場合、$2\sin\theta\cos\theta$ の値は次式より1となる。

$$\frac{2ab}{a^2+b^2}=\frac{2a^2}{a^2+a^2}=\frac{2a^2}{2a^2}=1$$

必須問題

I.(3) 題意の状況を図示すると右のようになる。



円の半径を r とおくと、その中心の座標は (r, r) となり、加えて直線 $ax+by=1$ との距離は r となる。点と直線との公式より r について次式が成立する。

$$r=\frac{|ar+br-1|}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{—⑤}$$

⑤式を変形すると以下のようになる。

$$(ar+br-1)^2=r^2(a^2+b^2)$$

$$2abr^2-2(a+b)r+1=0 \quad \text{—⑥}$$

⑥式に二次方程式の解の公式を適用し、r を求めると以下のようになる。

$$r=\frac{2(a+b)\pm\sqrt{4(a+b)^2-4\cdot 2ab\cdot 1}}{2\cdot 2ab}=\frac{(a+b)\pm\sqrt{a^2+2ab+b^2-2ab}}{2ab}$$

$$=\frac{(a+b)\pm\sqrt{a^2+b^2}}{2ab} \quad \text{—⑦}$$

ここで⑦式で示された解の妥当性を考える。

(i) $\dfrac{(a+b)+\sqrt{a^2+b^2}}{2ab}>\dfrac{b+\sqrt{b^2}}{2ab}=\dfrac{2b}{2ab}=\dfrac{1}{a}\cdots r>\dfrac{1}{a}$ となり解として不適

(ii) $a-\sqrt{a^2+b^2}<0$ より $(a+b)-\sqrt{a^2+b^2}<b$ となり、両辺を $2ab$ で割ると

$\dfrac{(a+b)-\sqrt{a^2+b^2}}{2ab}<\dfrac{b}{2ab}=\dfrac{1}{2a}<\dfrac{1}{a}\cdots r<\dfrac{1}{a}$ ($r<\dfrac{1}{b}$ も同様)

また、$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab>a^2+b^2$ より $(a+b)>\sqrt{a^2+b^2}\cdots(a+b)-\sqrt{a^2+b^2}>0$ となり $r>0$ となる。

以上(i)(ii)より半径 r は次のようになる。

$$r=\frac{(a+b)-\sqrt{a^2+b^2}}{2ab} \quad \left(0<r<\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right)$$

半径 r が有理数となるためには a^2+b^2 が平方数となる必要がある。

右の表より、考えられる組合せは $(a,b)=(3,4)$、$(4,3)$ の2つしか存在しないため、求める確率は次のようになる。

$1/18$ // $(\because 2/36)$

b＼a	1	2	3	4	5	6
1	×	×	×	×	×	×
2		×	×	×	×	×
3			×	25	×	×
4			25	×	×	×
5					×	×
6						×

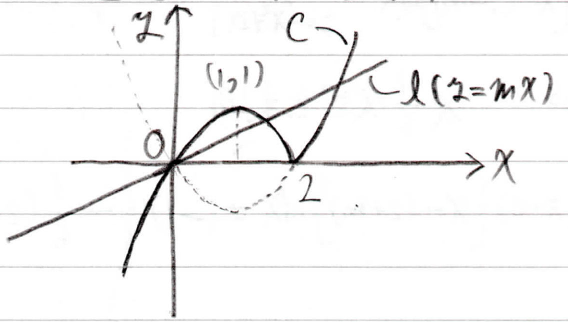
※ $25=5^2$

必須問題

Ⅱ.(1) 与えられた曲線の式を整理すると次のようになる。

$$y=x|x-2|=\begin{cases}-x^2+2x & (x<2) \quad (頂点は(1,1)) \\ x^2-2x & (x\geqq 2) \quad (頂点は(1,-1))\end{cases}$$

従って題意のグラフを図示すると次のようになる。



Ⅱ.(2) 曲線Cと直線lとの原点以外の交点を求める。

(i) $0<x<2$ における交点

$-x^2+2x=mx \cdots x=2-m \cdots (2-m, 2m-m^2)$

(ii) $x>2$ における交点

$x^2-2x=mx \cdots x=2+m \cdots (2+m, 2m+m^2)$

(i),(ii)の結果を用いて面積Sを求めると以下のようになる。

$$S=\int_0^{2-m}(-x^2+2x-mx)\,dx+\int_{2-m}^{2}(mx+x^2-2x)\,dx+\int_2^{2+m}(mx-x^2+2x)\,dx$$

$$=-\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{m-2}{2}x^2\right]_0^{2-m}+\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{m-2}{2}x^2\right]_{2-m}^{2}+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{m+2}{2}x^2\right]_2^{2+m}$$

$$=-\frac{1}{3}(2-m)^3-\frac{m-2}{2}(2-m)^2+\frac{8}{3}+2(m-2)-\frac{1}{3}(2-m)^3-\frac{m-2}{2}(2-m)^2$$

$$-\frac{1}{3}(2+m)^3+\frac{(2+m)^3}{2}+\frac{8}{3}-2(m+2)$$

$$=1/6\ \{2(2-m)^3+(2+m)^3-16\}=1/6(-m^3+18m^2-12m+8)$$

以上から面積Sは次のように表される。

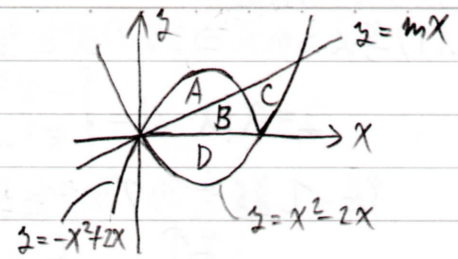
$$\underline{S=\frac{-m^3+18m^2-12m+8}{6}}\ //$$

No. 藤学理系

Date

必須問題

Ⅱ.(2)(補足) グラフを右のように分割して求める面積S
について考える。



各部の面積を求めると以下のようになる。

$$A=\int_0^{2-m}(-x^2+2x-mx)\,dx=\int_0^{2-m}-(x-0)\{x-(2-m)\}\,dx$$

$$=(-1)\left\{-\frac{1}{6}(2-m)^3\right\}=\frac{1}{6}(2-m)^3$$ ※ $\frac{1}{6}$ 公式を利用

$$B+C+D=\int_0^{2+m}(mx-x^2+2x)\,dx=\int_0^{2+m}-(x-0)\{x-(2+m)\}\,dx=(-1)\left\{-\frac{1}{6}(2+m)^3\right\}$$

$$=\frac{1}{6}(2+m)^3$$

$$A+B=D=\int_0^{2}(-x^2+2x)\,dx=\int_0^{2}-(x-0)(x-2)\,dx=(-1)\left(-\frac{1}{6}\cdot 2^3\right)=\frac{4}{3}$$

以上の結果を用いて面積Sを求めると以下のようになる。

$$S=A+C=A+[\{A+(B+C+D)\}-(A+B)-D]=2A+(B+C+D)-2(A+B)$$

$$=\frac{2}{6}(2-m)^3+\frac{1}{6}(2+m)^3-\frac{2\cdot 4}{3}=\frac{1}{6}\left\{2(2-m)^3+(2+m)^3-16\right\}=\frac{-m^3+18m^2-12m+8}{6}$$

$$\therefore S=\frac{-m^3+18m^2-12m+8}{6}\quad /\!/$$

Ⅱ.(3) (2)で求めた面積Sをmの関数として微分すると次のようになる。

$$\frac{dS}{dm}=\frac{1}{6}(-3m^2+36m-12)=-\frac{1}{2}(m^2-12m+4)$$

これを用いて増減表を書くと以下のようになる。

m	$\cdots$	$6-4\sqrt{2}$	$\cdots$	$6+4\sqrt{2}$	$\cdots$	
S'	$-$	0	$+$	0	$-$	
S	↘	$S(6-4\sqrt{2})$	↗	$S(6+4\sqrt{2})$	↘	←煩雑になるため省略

増減表より $m=6-4\sqrt{2}$ において極小値が得られるが、この値が $0<m<2$ を満たすか検討する。以下に不等式評価を記す。

$$-36<-32<-16\cdots-\sqrt{36}<-\sqrt{32}<-\sqrt{16}\cdots-6<-4\sqrt{2}<-4$$

$$\cdots 6-6<6-4\sqrt{2}<6-4\cdots 0<6-4\sqrt{2}<2$$

以上から面積Sが最小となるmは次のようになる。

$$m=6-4\sqrt{2}\quad /\!/$$

選択問題(数学Ⅰ・Ⅱ・A・B)

Ⅰ.(1) 実数 $a=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$, $b=\sqrt[3]{-2+\sqrt{5}}$ に対して、ab、$C_3(=a^3-b^3)$, $C_1(=a-b)$を計算し、求める。

(i) $ab=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\ \sqrt[3]{-2+\sqrt{5}}=\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}=\sqrt[3]{5-4}=1$ $\quad\therefore ab=1$

(ii) $C_3=(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}})^3-(\sqrt[3]{-2+\sqrt{5}})^3=(2+\sqrt{5})-(-2+\sqrt{5})=4$ $\quad\therefore C_3=4$

(iii) $(a-b)^3$を計算すると以下のようになる。

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a^3-b^3)-3ab(a-b)=4-3\cdot 1(a-b)$$

$$C_1^3=4-3C_1 \cdots C_1^3+3C_1-4=0 \text{ — ①}$$

$$\boxed{\begin{array}{r} C_1^2+C_1+4 \\ C_1-1\,\overline{)\,C_1^3+3C_1-4} \\ \underline{C_1^3-C_1^2\qquad\qquad} \\ C_1^2+3C_1-4 \\ \underline{C_1^2-C_1\qquad} \\ 4C_1-4 \\ \underline{4C_1-4} \\ 0 \end{array}}$$

①式は次のように因数分解する事ができる。

$$(C_1-1)(C_1^2+C_1+4)=0$$

判別式$(1^2-4\cdot 1\cdot 4<0)$より$C_1^2+C_1+4=0$は実数解を持たない事から$C_1=1$となる。

以上からab, C_3, C_1は以下に示すように整数となる。

$$\underline{ab=1,\ C_3=4,\ C_1=1}\ /\!/$$

Ⅰ.(2) (1)の解を用いて、$C_2(=a^2-b^2)$, $C_4(=a^4-b^4)$を求める。

(i) C_3の式を整理すると②式の結果が得られる。

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)=C_1\cdot\{(a+b)^2-ab\}=1\cdot\{(a+b)^2-1\}=4$$

$$(a+b)^2=5 \cdots a+b=\sqrt{5} \text{ — ②} \quad (\because a+b>0)$$

またC_2の式を変形すると②式を用いて、この値が求められる。

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)=C_1\cdot\sqrt{5}=\sqrt{5} \qquad \therefore C_2=\sqrt{5}$$

(ii) ②式を用いてa^2+b^2を求めると次のようになる。

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=5-2\cdot 1=3 \text{ — ③}$$

またC_4の式を変形すると③式を用いて、この値が求められる。

$$a^4-b^4=(a^2-b^2)(a^2+b^2)=C_2\cdot 3=3\sqrt{5} \qquad \therefore C_4=3\sqrt{5}$$

以上から$C_2=\sqrt{5}$、$C_4=3\sqrt{5}$となるので、$C_2/\sqrt{5}$、$C_4/\sqrt{5}$は整数となる。

選択問題(数学I・II・A・B)

I.(3) $f(x)$は4次の整式で、$f(a)=0$, $f(b)=0$であるから因数定理より次のように表す事ができる。

$f(x)=(x-a)(x-b)$(2次の整式) または $(x-a)(x-b)$(1次の整式)(1次の整式)

式中の$(x-a)(x-b)$を計算すると$\{(x^2+ab)-(a+b)x\}$となり、前問より$ab=1$, $a+b=\sqrt{5}$であるから以下に示すように$\{(x^2+ab)+(a+b)x\}$を掛けると4次の整式が得られる。

$$\{(x^2+ab)-(a+b)x\}\cdot\{(x^2+ab)+(a+b)x\}=(x^2+ab)^2-(a+b)^2x^2$$
$$=(x^2+1)^2-(\sqrt{5})^2x^2=x^4-3x^2+1$$
$$\therefore f(x)=x^4-3x^2+1 \quad —④$$

また漸化式$c_{n+4}=Ac_{n+2}+Bc_n$を整理すると以下のようになる。

$$a^{n+4}-b^{n+4}=A(a^{n+2}-b^{n+2})+B(a^n-b^n)$$
$$a^n(a^4-Aa^2-B)-b^n(b^4-Ab^2-B)=0$$

ここで上式の括弧内が、それぞれ$f(a)$, $f(b)$となれば方程式は満たされるので、$A=3$, $B=-1$となる。以上から求める結果は以下のようになる。

$$\underline{f(x)=x^4-3x^2+1,\ A=3,\ B=-1} \quad //$$

I.(4) 命題を次のように定める。

「数列$\{c_n\}$(nは自然数)において、①:c_5以上の奇数番目の項はc_1, c_3の整数倍の和で表され、②c_6以上の偶数番目の項はc_2, c_4の整数倍の和で表される。」—☆

上記の命題を数学的帰納法を用いて示す。

(i) $n=1$ (c_5, c_6)の場合

①c_5以上の奇数番目の項をc_{2n+3}と表す。

$$c_{2\cdot1+3}=c_5=3c_{2\cdot1+1}-c_{2\cdot1-1}=3c_3-c_1 \cdots c_5=3c_3-c_1 \quad (\because c_{n+4}=3c_{n+2}-c_n)$$

②c_6以上の偶数番目の項をc_{2n+4}と表す。

$$c_{2\cdot1+4}=c_6=3c_{2\cdot1+2}-c_{2\cdot1}=3c_4-c_2 \cdots c_6=3c_4-c_2 \quad (\because c_{n+4}=3c_{n+2}-c_n)$$

上記より$n=1$の場合、命題(☆)は満たされる。

(ii) $n=k+1$ ($c_{2(k+1)+3}$, $c_{2(k+1)+4}$)の場合

$n=k$の場合は成立($c_{2k+3}=3c_{2k+1}-c_{2k-1}$, $c_{2k+4}=3c_{2k+2}-c_{2k}$)するものとする。

① $c_{2(k+1)+3}=c_{2k+5}=3c_{2k+3}-c_{2k+1}=8c_{2k+1}-3c_{2k-1}$ $(\because c_{n+4}=3c_{n+2}-c_n)$

仮定(c_{2k+1}, c_{2k-1}, c_{2k+3}はc_1, c_3の整数倍の和で表される)より$c_{2(k+1)+3}$もc_1, c_3の整数倍の和で表される。

② $c_{2(k+1)+4}=c_{2k+6}=3c_{2k+4}-c_{2k+2}=8c_{2k+2}-3c_{2k}$ $(\because c_{n+4}=3c_{n+2}-c_n)$

仮定(c_{2k+2}, c_{2k}, c_{2k+4}はc_2, c_4の整数倍の和で表される)より$c_{2(k+1)+4}$もc_2, c_4の整数倍の和で表される。

以上から命題(☆)は示された。

※別紙に続く

選択問題(数学I・II・A・B)

1.(4)(続き)

命題(★)は示された。これより適当な整数定数($k_1 \sim k_4$)をおくと、奇数番目の項 c_{2n-1} と偶数番目の項 c_{2n} は以下のように表される。

$$c_{2n-1}=k_1c_1+k_2c_3,\quad c_{2n}=k_3c_2+k_4c_4$$

ここで $c_1=1,\ c_3=4,\ c_2=\sqrt{5},\ c_4=3\sqrt{5}$ なので上式は以下のように表される。

$$c_{2n-1}=k_1+4k_2,\quad c_{2n}=\sqrt{5}k_3+3\sqrt{5}k_4=\sqrt{5}(k_3+3k_4)$$

k_1+4k_2 及び k_3+3k_4 は整数なので、c_{2n-1} 及び $c_{2n}/\sqrt{5}$ は整数となる。

また、$c_n(=a^n-b^n)$ の正負について不等式を用いて検討を行う。

$$4<5 \cdots \sqrt{4}=2<\sqrt{5} \cdots \sqrt{5}-2>0 \cdots \sqrt[3]{-2+\sqrt{5}}>0$$

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}>\sqrt[3]{-2+\sqrt{5}}>0 \cdots (2+\sqrt{5})^{n/3}>(-2+\sqrt{5})^{n/3}>0 \quad (n\text{は自然数})$$

$$\cdots (2+\sqrt{5})^{n/3}-(-2+\sqrt{5})^{n/3}>0 \cdots a^n-b^n>0$$

上記の不等式の結果から数列 $\{c_n\}$ の全ての項は正の実数である事が分かる。

以上の数学的帰納法により示された命題(★)の結果と不等式評価の結果を総合すると、c_{2n-1}、$c_{2n}/\sqrt{5}$ は正の整数である事が示された。

c_{2n-1} と $(c_{2n})^2-1$ は以下のように表される。

$$c_{2n-1}=a^{2n-1}-b^{2n-1}$$

$$(c_{2n})^2-1=(a^{2n}-b^{2n})^2-1=a^{4n}-2a^{2n}b^{2n}+b^{4n}-1=a^{4n}+b^{4n}-3 \quad (\because ab=1)$$

これらを用いて除算を行うと右のようになる。

これより $(c_{2n})^2-1$ は次のように因数分解する事ができる。

$$(c_{2n})^2-1=(a^{2n-1}-b^{2n-1})(a^{2n+1}-b^{2n+1})$$
$$=c_{2n-1}\cdot c_{2n+1}$$

よって c_{2n-1} は $(c_{2n})^2-1$ の約数である。

$$\begin{array}{r|l} & a^{2n+1}-b^{2n+1} \\ \hline a^{2n-1}-b^{2n-1} & a^{4n}+b^{4n}-3 \\ & a^{4n}-a^{2n+1}b^{2n-1} \\ \hline (\because ab=1)\rightarrow & b^{4n}-3+a^2 \\ & -a^{2n-1}b^{2n+1}+b^{4n} \\ \hline \rightarrow & -3+a^2+b^2=0 \end{array}$$

(∵(2)③式より)

塾長コメント:問題文では数学的帰納法を用いる旨は一切、記されていない。
もっとより良い解答があるのかもしれない。

選択問題(数学I・II・A・B)

II.(1) 和積公式を用いると与式は次のように変形する事ができる。

$$\cos 4x - \cos x = -2\sin\left(\frac{4x+x}{2}\right)\sin\left(\frac{4x-x}{2}\right) = -2\sin\frac{5x}{2}\sin\frac{3x}{2}$$

また、不等式 $\cos 4x \leqq \cos x$ は上式を用いて $-2\sin\frac{5x}{2}\sin\frac{3x}{2} \leqq 0$ と表す事ができる。
$0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲において $\sin\frac{3x}{2} > 0$ であるから不等式が満たされるためには $\sin\frac{5x}{2} \geqq 0$ となる必要がある。従って $\frac{5x}{2} \leqq \pi \cdots x \leqq \frac{2}{5}\pi$ となる必要がある。
以上から求める解は次のようになる。

$$\cos 4x - \cos x = -2\sin\frac{5x}{2}\sin\frac{3x}{2},\quad 0 < x \leqq \frac{2}{5}\pi$$

II.(2) 与式は $x = a, \frac{1}{a}$ においてゼロとなる。この $a, \frac{1}{a}$ の大小関係(x軸上における位置関係)に着目して場合分けを行う。

(i) $0 < a < 1$ $(a < \frac{1}{a})$ の場合
$(x-a)^2 \geqq 0$ は常に成立するので、$(x - \frac{1}{a}) \geqq 0$ について不等式評価を行う。

$$x \geqq \frac{1}{a} \cdots 0 < \frac{1}{a} \leqq x < \frac{\pi}{2}\ (\because a > 0,\ 0 < x < \frac{\pi}{2}) \cdots \frac{2}{\pi} < a$$

以上をまとめると、以下のようになる。

- $0 < a \leqq \frac{2}{\pi}$ ならば $x = a$ ($\because x - \frac{1}{a} < 0$ のため等号のみ)
- $\frac{2}{\pi} < a < 1$ ならば $x = a$ (等号)、$\frac{1}{a} \leqq x < \frac{\pi}{2}$

(ii) $a = 1$ $(a = \frac{1}{a})$ の場合
不等式は $(x-1)^3 \geqq 0$ となるので、これを満たす x の範囲は次のようになる。

- $a = 1$ ならば $1 \leqq x < \frac{\pi}{2}$

(iii) $a > 1$ $(a > \frac{1}{a})$ の場合
$(x-a)^2 \geqq 0$ は常に成立するので、$(x - \frac{1}{a}) \geqq 0$ について不等式評価を行う。

$$x \geqq \frac{1}{a} \cdots 0 < \frac{1}{a} \leqq x < \frac{\pi}{2}\ (\because a > 0,\ 0 < x < \frac{\pi}{2}) \cdots \frac{2}{\pi} < a \cdots \frac{2}{\pi} < 1 < a$$

また $\frac{1}{a} < 1 < a$ なので $(x-a)^2 = 0$ となる x は $\frac{1}{a} \leqq x$ の範囲に含まれる。
これらをまとめると次のようになる。

- $a > 1$ ならば $\frac{1}{a} \leqq x < \frac{\pi}{2}$

以上の場合分けの結果を整理すると以下のようになる。

$$\begin{cases} 0 < a \leqq \frac{2}{\pi} & \cdots\ x = a \\ \frac{2}{\pi} < a < 1 & \cdots\ x = a,\ \frac{1}{a} \leqq x < \frac{\pi}{2} \\ a \geqq 1 & \cdots\ \frac{1}{a} \leqq x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

No. 藤紫理系

Date

選択問題（数学Ⅰ・Ⅱ・A・B）

Ⅱ.(3) $\cos 4x$を変形すると以下のようになる。

$$\cos 4x = \cos(2x+2x) = \cos^2 2x - \sin^2 2x = (\cos^2 x - \sin^2 x)^2 - (2\sin x \cos x)^2$$
$$= \cos^4 x - 2\sin^2 x\cos^2 x + \sin^4 x - 4\sin^2 x \cos^2 x$$
$$= \cos^4 x - 6(1-\cos^2 x)\cos^2 x + (1-\cos^2 x)^2$$
$$= \cos^4 x - 6\cos^2 x + 6\cos^4 x + 1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x$$
$$= 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$$
$$\therefore \cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$$

与えられた不等式について底の条件、真数条件を確認する。

・底の条件：xの範囲は $0 < x < \frac{\pi}{2}$ なので $0 < \cos x < 1$ となり底の条件は満たされる。

・真数条件：$8\cos^3 x - 8\cos x + \frac{1}{\cos x} = \frac{\cos 4x}{\cos x}$ $(0 < \cos x < 1)$ より $\cos 4x$の値が正となるxの範囲を求める。$0 < 4x < 2\pi$ $(\because 0 < x < \frac{\pi}{2})$ となるので、$\cos 4x$が正の値となるには以下の不等式が満たされる必要がある。

$$0 < 4x < \frac{\pi}{2}, \ \frac{3}{2}\pi < 4x < 2\pi \ \cdots \ 0 < x < \frac{\pi}{8}, \ \frac{3}{8}\pi < x < \frac{\pi}{2}$$

底の値が1未満なので、不等式を変形すると以下のようになる。

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\cos 4x}{\cos x} > 1 \ \cdots \ 1 > \cos 4x > \cos x$$

真数条件の下では $\cos 4x < 1$ は常に成立するので $\cos 4x > \cos x$ を評価する。

$$0 < \cos 4x - \cos x = -2\sin\frac{5x}{2}\sin\frac{3x}{2} \ \cdots \ 0 > \sin\frac{5x}{2}\sin\frac{3x}{2} \ \cdots \ 0 > \sin\frac{5x}{2} \ (\because \sin\frac{3x}{2} > 0, \ 0 < x < \frac{\pi}{2})$$

これより不等式が満たされるxの範囲は $\pi < \frac{5x}{2} < \frac{5}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$ より $\frac{2}{5}\pi < x < \frac{\pi}{2}$ と求められる。

以上から求める解は以下のようになる。

$$\underline{\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1, \ \frac{2}{5}\pi < x < \frac{\pi}{2}} \ //$$

Ⅱ.(4) (3)の解より条件qが成立する場合のxの範囲は $\frac{2}{5}\pi < x < \frac{\pi}{2}$ となり、この範囲において条件pが成立するためには以下の対応関係から $\frac{1}{a} \leqq \frac{2}{5}\pi$ を満たさなければならない。

$$q: \frac{2}{5}\pi < x < \frac{\pi}{2}, \ \cancel{q}: \frac{1}{a} \leqq x < \frac{\pi}{2}$$

「p」

従ってaの条件は次のようになる。

$$\underline{\frac{5}{2\pi} \leqq a} \ //$$

選択問題(数学III)

I.(1) 与えられたαの式とド・モアブルの定理を用いてα^nを計算すると以下のようになる。

$$\alpha^n=\left\{\cos\left(\frac{2\pi}{p}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{p}\right)\right\}^n=\cos\left(\frac{2n\pi}{p}\right)+i\sin\left(\frac{2n\pi}{p}\right)$$

従ってα^nの実部と虚部は次のようになる。

実部：$\cos\left(\frac{2n\pi}{p}\right)$，虚部：$\sin\left(\frac{2n\pi}{p}\right)$ //

I.(2) 複素数z、及びその共役複素数$\bar{z}$を実数a,bを用いて以下のように定義する。
ただし、実数a,bは①,②式の関係を満たすものとする。

$z=a+ib$、$\bar{z}=a-ib$、$a=\cos\left(\frac{2n\pi}{p}\right)$ ―①，$b=\sin\left(\frac{2n\pi}{p}\right)$ ―②

ここで複素数の関数$f(z)$に上記の複素数zを代入し、式変形を行うと以下のようになる。

$$f(z)=\frac{1}{z+1}=\frac{\bar{z}+1}{(z+1)(\bar{z}+1)}=\frac{\bar{z}+1}{z\bar{z}+z+\bar{z}+1}=\frac{(a-ib)+1}{|z|^2+1+(a+ib)+(a-ib)}$$

$$=\frac{(1+a)-ib}{1+1+2a}=\frac{(1+a)-ib}{2(1+a)}=\frac{(1+a)}{2(1+a)}-\frac{ib}{2(1+a)} \quad ―③$$

③式において分母に$(1+a)$が表われているが、これがゼロにはならない事を示す。

○ $(1+a)=0$ならば$a=-1$、すなわち①式より$\frac{2n\pi}{p}=\pi$という事になる。
これを変形すると$2n=p$となるが、問題文中よりpは3以上の奇数と定められている事から、$2n=p$を満たす自然数nは存在しない事が分かる。
従って、$(1+a)\neq 0$となる。

以上から、さらに③式を変形すると次のようになる。

$$f(z)=\frac{1}{2}-\frac{ib}{2(1+a)} \quad ―④$$

(1)の解及び①,②式から$f(z)=f(\alpha^n)$なので、④式より$f(\alpha^n)$は実部が$1/2$の複素数となる。

選択問題(数学Ⅲ)

Ⅰ.(3) (2)の解答で用いた④式より$f(\alpha^n)$は次のように表される。

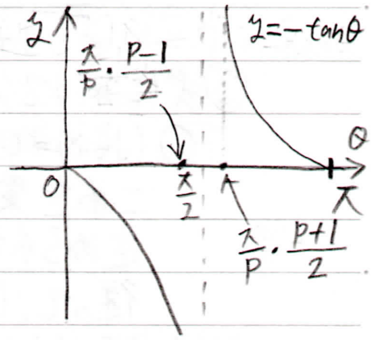
$$f(\alpha^n)=\frac{1}{2}-\frac{i\cdot\sin(2n\pi/p)}{2\{1+\cos(2n\pi/p)\}} \quad \text{—⑤}$$

$f(\alpha^n)$の偏角 $\arg f(\alpha^n)$は⑤式より次のように表されるので、$\tan(\arg f(\alpha^n))$は⑦式のように計算される。

$$\arg f(\alpha^n)=\tan^{-1}\left[\frac{-\sin(2n\pi/p)}{2\{1+\cos(2n\pi/p)\}}\Big/\left(\frac{1}{2}\right)\right] \quad \text{—⑥}$$

$$\begin{aligned}\tan(\arg f(\alpha^n))&=-\frac{\sin(2n\pi/p)}{2\{1+\cos(2n\pi/p)\}}\Big/\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{\sin(2n\pi/p)}{1+\cos(2n\pi/p)}\\&=-\sqrt{\frac{\sin^2(2n\pi/p)}{\{1+\cos(2n\pi/p)\}^2}}=-\sqrt{\frac{1-\cos^2(2n\pi/p)}{\{1+\cos(2n\pi/p)\}^2}}\\&=-\sqrt{\frac{\{1-\cos(2n\pi/p)\}\{1+\cos(2n\pi/p)\}}{\{1+\cos(2n\pi/p)\}^2}}=-\sqrt{\frac{1-\cos(2n\pi/p)}{1+\cos(2n\pi/p)}}\\&=-\sqrt{\tan^2\left(\frac{n\pi}{p}\right)}=-\tan\left(\frac{n\pi}{p}\right) \quad \text{—⑦}\end{aligned}$$

⑦式が最大となるのは右のグラフより$n=\frac{p+1}{2}$の場合となる。また、この時の$\tan(\arg f(\alpha^n))$は以下のように計算される。



$$\tan(\arg f(\alpha^n))=-\tan\left(\frac{\pi}{p}\cdot\frac{p+1}{2}\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2p}\right)$$

$$=1\Big/\tan\left(\frac{\pi}{2p}\right)$$

以上から求める解は次のようになる。

最大値：$1\Big/\tan\left(\frac{\pi}{2p}\right)$，$n=\frac{p+1}{2}$ //

No. 藤柴理系

Date

選択問題(数学Ⅲ)

Ⅱ.(1) 与えられた不等式をx倍し、それらの逆数を考えると次の不等式が得られる。

$$\frac{1}{2x^3} \leqq \frac{1}{x(x^2+1)} \leqq \frac{1}{x(x+1)} \quad \text{―― ①}$$ ※$x \geqq 1$の場合のみ

①式を$x: 1 \to n$の範囲で積分すると以下のようになる。

$$\int_1^n \frac{1}{2x^3}dx \leqq \int_1^n \frac{1}{x(x^2+1)}dx \leqq \int_1^n \frac{1}{x(x+1)}dx = \int_1^n \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$\left[-\frac{1}{4x^2}\right]_1^n \leqq I_n \leqq \left[\log x - \log(x+1)\right]_1^n = \left[\log\frac{x}{x+1}\right]_1^n$$

$$\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \leqq I_n \leqq \log\frac{n}{n+1} - \log\frac{1}{2} = \log\frac{2n}{n+1}$$

以上から次の不等式が示される。

$$\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \leqq I_n \leqq \log\frac{2n}{n+1} \quad (x \geqq 1) \quad //$$

Ⅱ.(2) 与式の右辺を変形すると次のようになる。

$$\frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1} = \frac{(a+b)x^2 + cx + a}{x(x^2+1)} \quad \text{―― ②}$$

②式の分子が1となるためには$a=1, b=-1, c=0$である必要がある。

また、これを用いてI_nを計算すると以下のようになる。

$$\int_1^n \frac{1}{x(x^2+1)}dx = \int_1^n \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)dx = \left[\log x - \frac{1}{2}\log(x^2+1)\right]_1^n$$

$$= \left[\log\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right]_1^n = \log\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} - \log\frac{1}{\sqrt{2}} = \log\frac{\sqrt{2}n}{\sqrt{n^2+1}}$$

以上から求める解は以下のようになる。

$$a=1,\ b=-1,\ c=0,\ I_n = \log\left(\sqrt{2}n/\sqrt{n^2+1}\right) \quad //$$

Ⅱ.(3) (2)で求めたI_nの極限を計算すると以下のようになる。

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} \log\frac{\sqrt{2}n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \log\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+1/n^2}} = \log\sqrt{2} = \frac{1}{2}\log 2$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} I_n = \frac{1}{2}\log 2 \quad //$$