

ルンゲ・クッタ法による 運動シミュレーションの高精度化

Improving accuracy of motion simulation with Runge-Kutta method

Author : 志多 友史 (Yuji Shida)

Date : 2019/05/19

Keywords : ルンゲ・クッタ法(Runge-Kutta method), 常微分方程式(ordinary differential equation), 運動方程式(motion equation), 二体問題(two-body problem), 放物運動(parabolic motion), 空気抵抗(air resistance), E×B ドリフト(E-cross-B drift), ロケット(rocket), スイングバイ(swing-by), 数値計算(numerical calculation), C言語(C programming language)

Abstract:=====

本稿では、常微分方程式の数値解析において良く用いられる古典的ルンゲ・クッタ法(RK4)を質点の運動方程式に適用した場合の結果について記す。具体的には、放物運動、外力が変化する物体の運動、質量が変化する物体の運動について理論解との比較を行う。また、過去に報告した荷電粒子の運動に対してルンゲ・クッタ法を適用し、その効果を検証する。

In this report, I applied the 4th-order Runge-Kutta method (RK4) to motion equation of mass point. The 4th-order Runge-Kutta method is a classical method, but it is used for the numerical analysis of the differential equation well. Specifically, I compared simulated results with theoretical results about parabolic motion, external force change motion and mass change motion. And I verified the effects of motion of charged particle which applied Runge-Kutta method.

=====

1. 序論(Introduction)

今後、自身のプログラム開発において質点の運動や時間発展を伴う現象をシミュレーションする場合、数値的な発散を極力抑える事を考えなければならない。本稿で扱うルンゲ・クッタ法は古典的手法であるが、実装が容易で多種多様な分野で用いられている。特に自著「静的電磁場中における荷電粒子の運動」では荷電粒子の運動シミュレーションにオイラー法を用いており容易に計算結果が発散した経緯があるので、そのような解析に対してルンゲ・クッタ法を適用して、より良いシミュレーション環境を整えていきたいと思い、その備忘録として本稿を作成した。

2. 理論(Theory)

本章では始めにルンゲ・クッタ法の概要について説明し、次に運動方程式に対してどのように適用するのかを記す。

2. 1. ルンゲ・クッタ法(RK4)

ルンゲ・クッタ法(RK4) (以降、(RK4)を省略) とは4次1段階法の計算手法で、 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ のような一階の微分方程式と独立変数の刻み幅 h 及び初期条件 (x_i, y_i) が与えられたときに、次ステップの値 y_{i+1} を次式のように計算するものである。

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4)$$

ここで、上式の f_{1-4} は以下のように定義される。

$$f_1 = f(x_i, y_i) \quad f_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}f_1\right) \quad f_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + hf_2\right) \quad f_4 = f(x_i + h, y_i + hf_3)$$

ルンゲ・クッタ法の詳細な理論的背景については参考文献^[1]にテイラー展開を用いた証明が記されており、非常に長い式変形で証明がなされている。この計算方法を多変数の場合に拡張すると以下のように表される。ここで太字はベクトルを意味する。

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + \frac{h}{6}(\mathbf{f}_1 + 2\mathbf{f}_2 + 2\mathbf{f}_3 + \mathbf{f}_4)$$

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}(x_i, \mathbf{y}_i) \quad \mathbf{f}_2 = \mathbf{f}\left(x_i + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_i + \frac{h}{2}\mathbf{f}_1\right) \quad \mathbf{f}_3 = \mathbf{f}\left(x_i + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_i + h\mathbf{f}_2\right) \quad \mathbf{f}_4 = \mathbf{f}(x_i + h, \mathbf{y}_i + h\mathbf{f}_3)$$

高階の微分方程式に対しては、中間の変数を増やして一階の微分方程式を連立させた後、ルンゲ・クッタ法を適用する。

2. 2. 運動方程式へのルンゲ・クッタ法の適用

本節ではルンゲ・クッタ法を運動方程式へ適用する際の式の整理を行う。まず、運動方程式を以下のように定義する。ここで \mathbf{r}, \mathbf{v} は位置ベクトル、速度ベクトル、 \mathbf{p}, \mathbf{f} は運動量ベクトル、力のベクトルを表す。

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}$$

質点の質量 m が時間変化しない場合は、次式の二階の微分方程式を解く事になるが、上式の運動量ベクトル \mathbf{p} を用いた方がより一般的であり、例としてロケットの発射等では、燃料の噴射による質量の減少を運動量ベクトルに含ませる事ができる。

$$m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{f}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$$

ここで簡単のため以下のようにベクトルを定義する。

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \quad \mathbf{g}(t, \mathbf{h}) = \begin{pmatrix} \mathbf{v}(t, \mathbf{h}) \\ \mathbf{f}(t, \mathbf{h}) \end{pmatrix} \quad \frac{d\mathbf{h}}{dt} = \mathbf{g}(t, \mathbf{h})$$

これを用いて運動方程式にルンゲ・クッタ法を適用した場合を考えると式は以下のようなになる。

$$\mathbf{h}_{i+1} = \mathbf{h}_i + \frac{T}{6}(\mathbf{g}_1 + 2\mathbf{g}_2 + 2\mathbf{g}_3 + \mathbf{g}_4)$$

$$\mathbf{g}_1 = \mathbf{g}(t_i, \mathbf{h}_i) \quad \mathbf{g}_2 = \mathbf{g}(t_i + T/2, \mathbf{h}_i + (T/2)\mathbf{g}_1)$$

$$\mathbf{g}_3 = \mathbf{g}(t_i + T/2, \mathbf{h}_i + (T/2)\mathbf{g}_2) \quad \mathbf{g}_4 = \mathbf{g}(t_i + T, \mathbf{h}_i + T\mathbf{g}_3)$$

ここで、 T は1タイムステップの時間を意味する。

3. 方法(Method)

前章で示した基礎理論を基に数値解析プログラムを具体的に作り上げる。

3. 1. 運動方程式用ルンゲ・クッタ法関数

本プログラムは初期条件設定関数(`init_setting`)、ルンゲ・クッタ法関数(`Runge_Kutta_RK4`)、運動方程式関数(`func_RK4`)及び `main` 関数の4つの関数で構成されている。特に `Runge_Kutta_RK4` と `func_RK4` が重要な関数で `Runge_Kutta_RK4` が `func_RK4` を4回呼び出し2. 2節に記したベクトル \mathbf{g} を作成し、最後にベクトル \mathbf{h}_{i+1} を求める。

運動方程式用ルンゲ・クッタ法関数(`Runge_Kutta_RK4`)

```
int Runge_Kutta_RK4(int bn,double bdt,double bh0[],double bh1[])
{
    int i,j,bmax;
    double bdt2,bdt6;           //dt/2, dt/6
    double bufs[50],bufr[50];   //send/recieve data array
    double bufg[4][50];        //[No.1~4] data array

    bmax=50;
    if(bn>bmax) return -1;

    bdt2=bdt/2.0e0;
    bdt6=bdt/6.0e0;
    for(i=0;i<bmax;i++){bufs[i]=0.0e0; bufr[i]=0.0e0;}
    for(i=0;i<4;i++){for(j=0;j<bmax;j++) bufg[i][j]=0.0e0;}

    bufs[0]=bh0[0];                //1st step
    for(i=1;i<bn;i++) bufs[i]=bh0[i];
    func_RK4(bufs,bufr);
    for(i=0;i<bn;i++) bufg[0][i]=bufr[i];

    bufs[0]=bh0[0]+bdt2;           //2nd step
    for(i=1;i<bn;i++) bufs[i]=bh0[i]+bdt2*bufr[i];
    func_RK4(bufs,bufr);
    for(i=0;i<bn;i++) bufg[1][i]=bufr[i];

    bufs[0]=bh0[0]+bdt2;           //3rd step
    for(i=1;i<bn;i++) bufs[i]=bh0[i]+bdt2*bufr[i];
    func_RK4(bufs,bufr);
    for(i=0;i<bn;i++) bufg[2][i]=bufr[i];

    bufs[0]=bh0[0]+bdt;           //4th step
    for(i=1;i<bn;i++) bufs[i]=bh0[i]+bdt*bufr[i];
    func_RK4(bufs,bufr);
    for(i=0;i<bn;i++) bufg[3][i]=bufr[i];

    bh1[0]=bh0[0]+bdt;
    for(i=1;i<bn;i++){
        bh1[i]=bh0[i]+bdt6*(bufg[0][i]+2.0e0*bufg[1][i]+2.0e0*bufg[2][i]+bufg[3][i]);
    }

    return 0;
}
```

3. 2. 運動方程式関数

運動方程式関数(func_RK4)は時刻 t_i 、位置ベクトル $\mathbf{r}(t_i)$ 、運動量ベクトル $\mathbf{p}(t_i)$ が与えられた時、速度ベクトル \mathbf{v} (運動量ベクトル $\mathbf{p}(t_i)$ を質量で除したもの)、力のベクトル \mathbf{f} (位置・速度で決定される外力) を計算し呼び出し元のルンゲ・クッタ関数(Runge_Kutta_RK4)に結果を返すものである。詳細は次章でシミュレーション結果と合わせて示す。

4. 結果(Results)

本章では各種力学現象に関してルンゲ・クッタ法を適用したシミュレーション結果について記す。

4. 1. 放物運動への適用 (力・質量が変化しない例)

初歩的な運動の問題として放物運動がある。ここでは、以下の初期条件の下で運動シミュレーションを行った。

質量：3.0[kg] (=m)

高さ：20[m] (=z₀)

初速：60[m/s] (=v₀)

仰角： $\pi/3$ [rad] (=θ)

重力加速度：9.80665[m/s²] (=g)

位置の理論解は以下のように与えられる。

$$x(t) = v_0 \cos \theta \cdot t \quad z(t) = v_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 + z_0$$

ルンゲ・クッタ法で解く際に必要となるベクトル関数 $\mathbf{g}(t, \mathbf{h})$ は次のように表される。

$$\mathbf{g}(t, \mathbf{h}) = \begin{pmatrix} \mathbf{v}(t, \mathbf{h}) \\ \mathbf{f}(t, \mathbf{h}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x/m \\ p_y/m \\ p_z/m \\ 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

シミュレーション結果は図4. 1に示す通りで、タイムステップを粗くしてもほぼ理論解と一致する事が分かる。

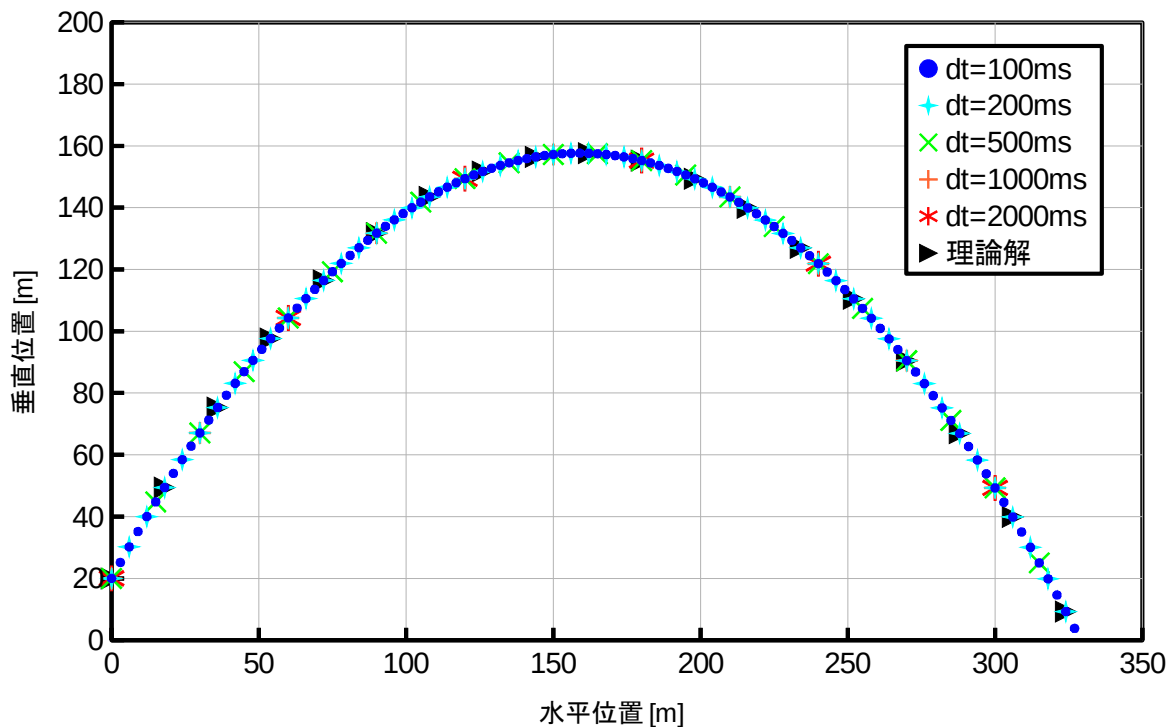


図4. 1 放物運動のシミュレーション

4. 2. 空気抵抗のある運動への適用（速度によって力が変化する例）

空気抵抗がある場合の放物運動を考える。ここでは空気抵抗は速度 \mathbf{v} に比例し、 $-\mathbf{kv}$ の力を物体に与えるものと仮定し、以下の初期条件で運動シミュレーションを行った。

質量：5.0[kg] (=m)

高さ：800[m] (=z₀)

初速：20[m/s] (=v₀)

仰角： $\pi/4$ [rad] (=θ)

空気抵抗係数：2.0[kg/s] (=k)

重力加速度：9.80665[m/s²] (=g)

速度・位置の理論解は以下のように与えられる。

$$v_x(t) = v_0 \cos \theta \cdot \exp\left(-\frac{k}{m}t\right) \quad v_z(t) = \left(v_0 \sin \theta + \frac{mg}{k}\right) \exp\left(-\frac{k}{m}t\right) - \frac{mg}{k}$$

$$x(t) = \frac{mv_0}{k} \cos \theta \cdot \left\{1 - \exp\left(-\frac{k}{m}t\right)\right\} \quad z(t) = \left(\frac{mv_0}{k} \sin \theta + \frac{m^2g}{k^2}\right) \left\{1 - \exp\left(-\frac{k}{m}t\right)\right\} - \frac{mg}{k}t + z_0$$

ルンゲ・クッタ法で解く際に必要となるベクトル関数 $\mathbf{g}(t, \mathbf{h})$ は次のように表される。

$$\mathbf{g}(t, \mathbf{h}) = \begin{pmatrix} \mathbf{v}(t, \mathbf{h}) \\ \mathbf{f}(t, \mathbf{h}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x/m \\ p_y/m \\ p_z/m \\ -k p_x/m \\ -k p_y/m \\ -k p_z/m - mg \end{pmatrix}$$

シミュレーション結果は図4. 2～図4. 4に示す通りで、速度・位置共に理論解と一致している事が分かる。特に終端速度は $v_z(\infty) = -24.5$ [m/s] に、水平位置については $x(\infty) = 35.4$ [m] に収束していく様子が見て取れる。

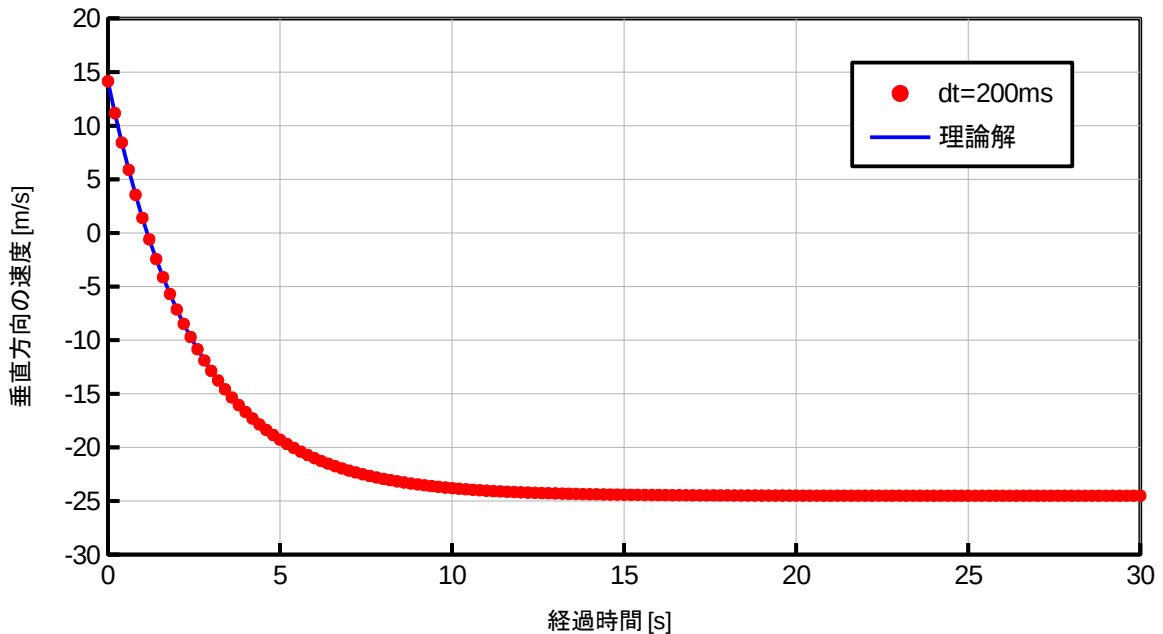


図4. 2 空気抵抗のある放物運動のシミュレーション（垂直方向の速度）

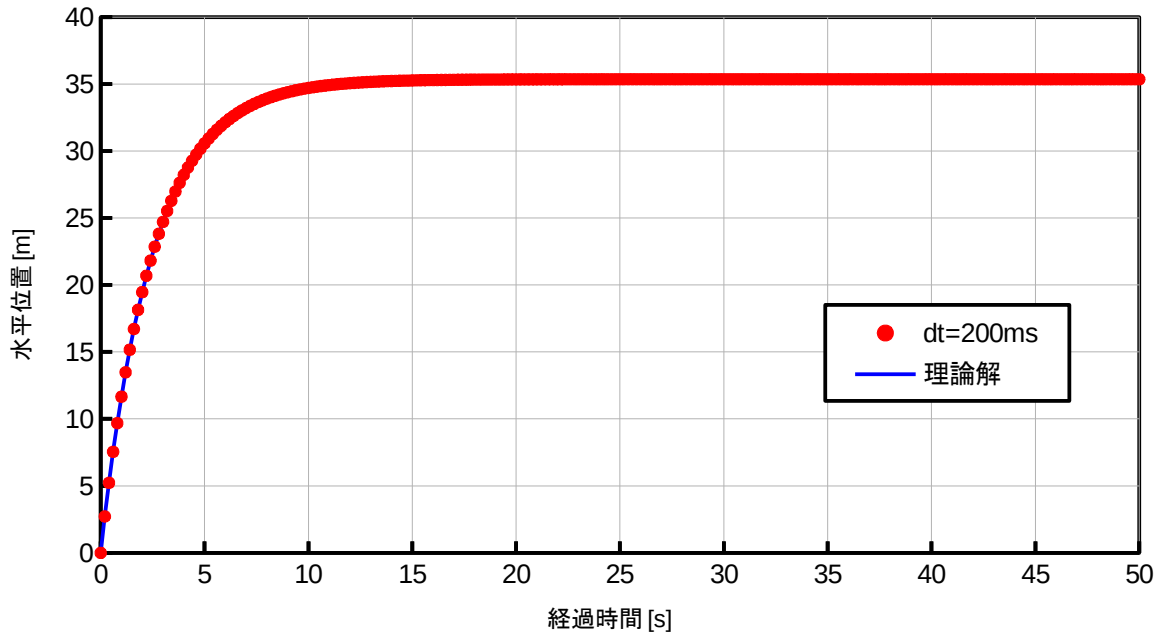


図 4. 3 空気抵抗のある放物運動のシミュレーション（水平位置）

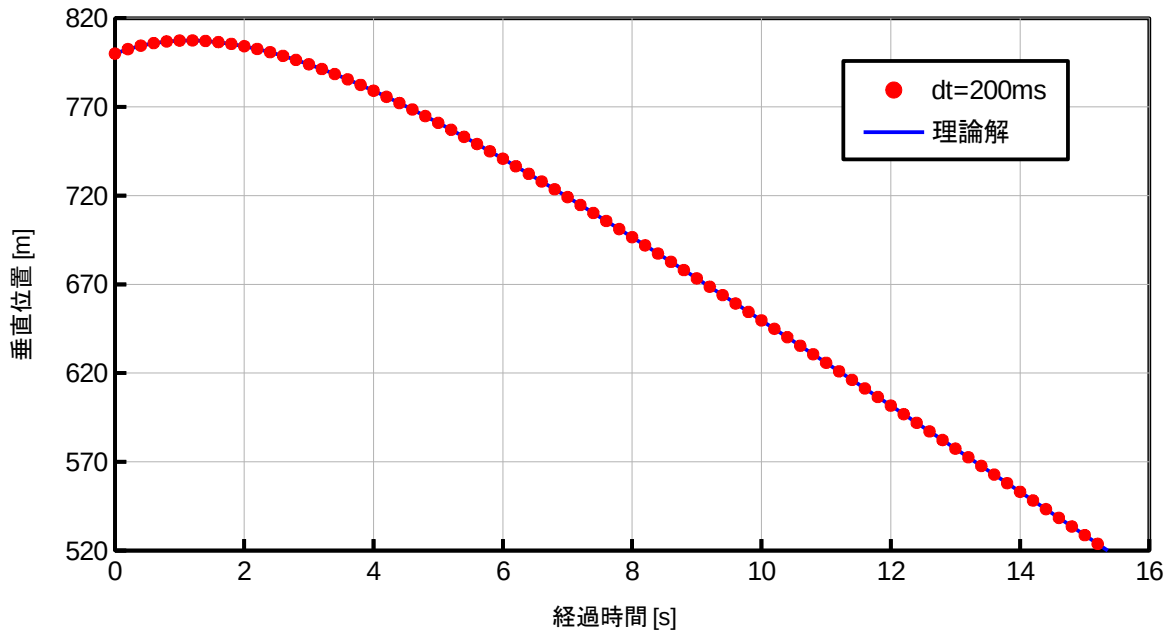


図 4. 4 空気抵抗のある放物運動のシミュレーション（垂直位置）

4. 3. 電磁場中の荷電粒子の運動への適用 (速度によって力が変化する例)

静的電磁場中を運動する荷電粒子の運動シミュレーションに対してルンゲ・クッタ法の適用を行う。自著「静的電磁場中における荷電粒子の運動」ではオイラー法を用いて運動シミュレーションを行ったが、容易に計算結果が発散したので、ルンゲ・クッタ法による改善効果について確かめる。

初期条件は、以下の通りである。

質量： $1.672621898 \times 10^{-27} [\text{kg}] (=m)$

電荷： $1.6021766208 \times 10^{-19} [\text{C}] (=q)$

初期位置：原点

初速： $1.0 \times 10^6 [\text{m/s}] (=v_x(0))$, $(v_y(0)=0)$

電場： $(2.0 \times 10^4, 5.0 \times 10^4, 0.0) [\text{V/m}] (=E_x, E_y, E_z)$

磁場： $(0.0, 0.0, 1.0) [\text{T}] (=B_x, B_y, B_z)$

位置の理論解は以下のように与えられる。

$$x(t) = \frac{mA}{qB_z} \sin\left(\frac{qB_z}{m}t + \theta\right) + \frac{E_y}{B_z}t - \frac{mA}{qB_z} \sin\theta$$

$$y(t) = \frac{mA}{qB_z} \cos\left(\frac{qB_z}{m}t + \theta\right) - \frac{E_x}{B_z}t - \frac{mA}{qB_z} \cos\theta$$

$$A = \sqrt{\left(v_x(0) - \frac{E_y}{B_z}\right)^2 + \left(v_y(0) + \frac{E_x}{B_z}\right)^2}, \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{v_x(0) - E_y/B_z}{A}\right)$$

ルンゲ・クッタ法で解く際に必要となるベクトル関数 $\mathbf{g}(\mathbf{t}, \mathbf{h})$ は次のように表される。

$$\mathbf{g}(\mathbf{t}, \mathbf{h}) = \begin{pmatrix} \mathbf{v}(\mathbf{t}, \mathbf{h}) \\ \mathbf{f}(\mathbf{t}, \mathbf{h}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x/m \\ p_y/m \\ p_z/m \\ qE_x + (q/m)(p_y B_z - p_z B_y) \\ qE_y + (q/m)(p_z B_x - p_x B_z) \\ qE_z + (q/m)(p_x B_y - p_y B_x) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} p_x/m \\ p_y/m \\ p_z/m \\ qE_x + (q/m)p_y B_z \\ qE_y - (q/m)p_x B_z \\ 0 \end{pmatrix}$$

シミュレーション結果は図4. 5に示す通りで、オイラー法に比べて精度が各段に向上している事が分かる。

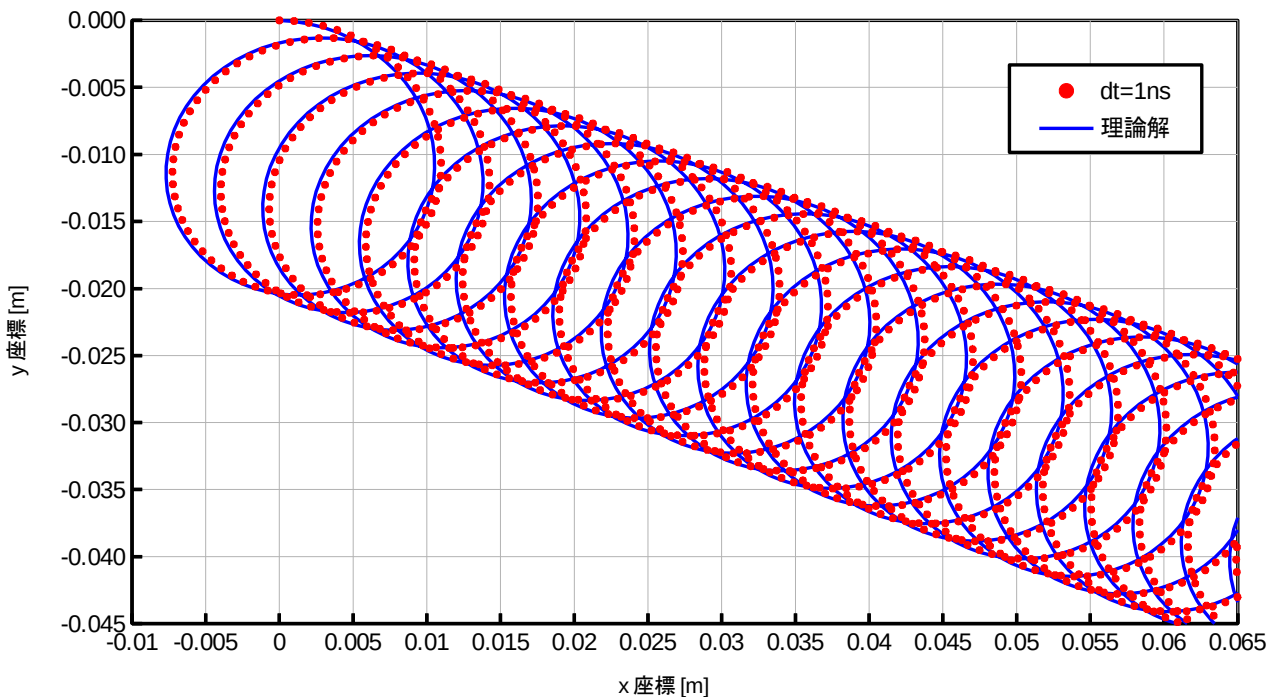


図4. 5 荷電粒子の運動のシミュレーション

4. 4. ロケットの打ち上げ時の運動への適用（時間によって質量が変化する例）

ロケットの質量の大部分は燃料が占めており、発射直後から時間の経過によって質量が減少していく。従って、高度が上がるにつれて軽量になり加速しやすくなる。ここでは、質量は時間の一次関数で単調減少、上昇推力は一定であると仮定し、空気抵抗を考慮しない場合の運動についてシミュレーションを行う。

初期条件は、以下の通りである。

初期質量：500[kg] (=m₀)

後期質量：200[kg] (=m₁)

噴射時間：5.0[s](=T_f)

噴射推力：6000[N](=F) ※噴射時間経過後 0.0[N]となる。

質量変化率：60[kg/s] (=k)

$$\text{質量の時間変化： } m(t) = m_0 - \frac{m_0 - m_1}{T_f} t = m_0 - kt$$

重力加速度：9.80665[m/s²] (=g)

運動量・速度及び高度の理論解は以下のように与えられる。なお、噴射時間経過後はただの垂直投射運動として扱う。

$$p_z(t) = \frac{kg}{2} t^2 + (F - m_0 g) t$$

$$v_z(t) = \frac{p_z(t)}{m(t)} = \frac{kg/2}{m_0 - kt} t^2 + \frac{F - m_0 g}{m_0 - kt} t = \frac{g/2}{m_0/k - t} t^2 + \frac{(F - m_0 g)/k}{m_0/k - t} t$$

$$z(t) = -\frac{g}{4} t^2 - \left(\frac{2F - m_0 g}{2k} \right) \left\{ t + \frac{m_0}{k} \ln \left(1 - \frac{k}{m_0} t \right) \right\}$$

高度を求めるのには以下の不定積分を用いた。

$$\int \frac{ax^2}{b-x} dx = -ab^2 \ln(x-b) - abx - \frac{ax^2}{2} + Const \quad \int \frac{ax}{b-x} dx = -ab \ln(x-b) - ax + Const$$

ルンゲ・クッタ法で解く際に必要となるベクトル関数 $\mathbf{g}(t, \mathbf{h})$ は次のように表される。

$$\mathbf{g}(t, \mathbf{h}) = \begin{pmatrix} v_x(t, \mathbf{h}) \\ v_y(t, \mathbf{h}) \\ f(t, \mathbf{h}) \\ 0 \\ 0 \\ F - m(t)g \end{pmatrix}$$

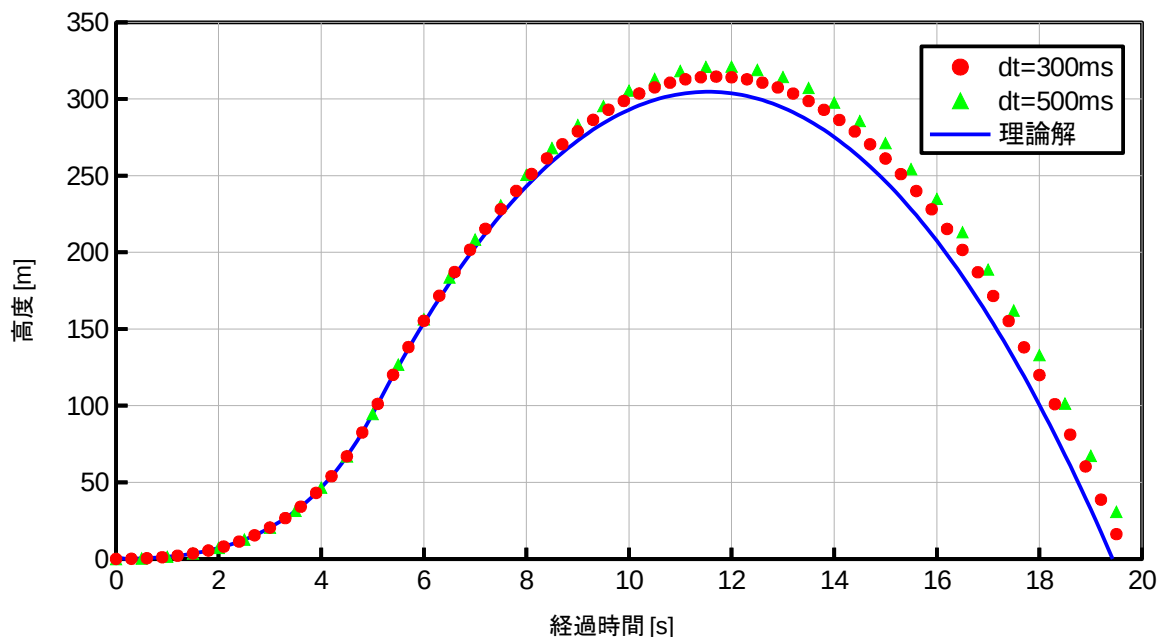


図 4. 6 ロケットの高度の時間変化

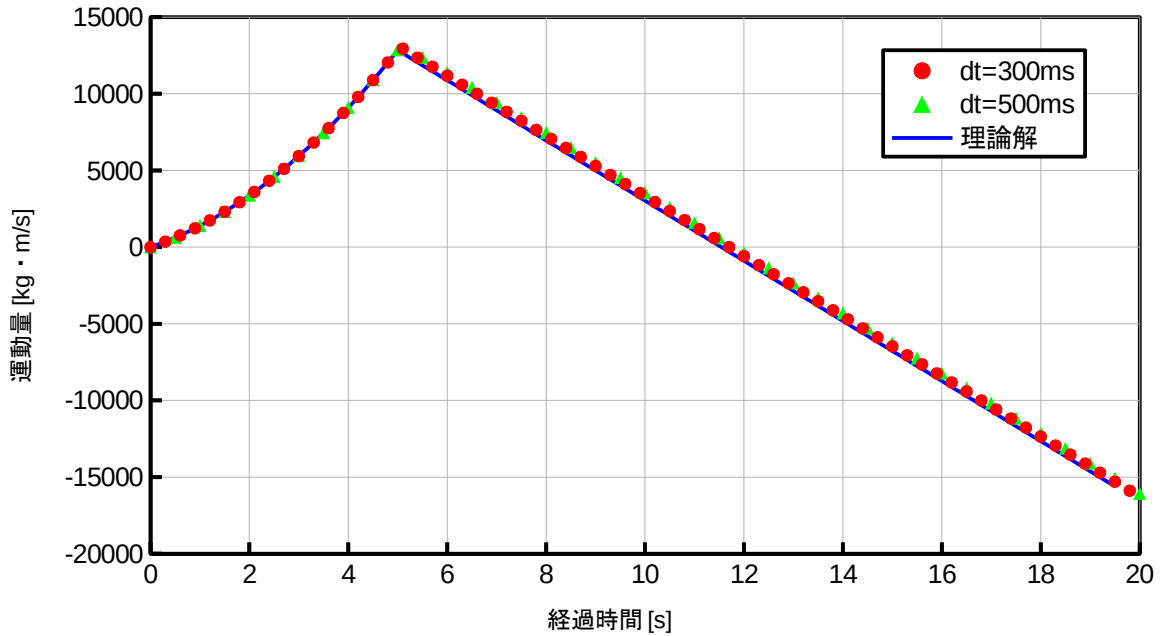


図4. 7 ロケットの運動量の時間変化

4. 5. 衛星のスイングバイへの適用（時間・場所によって力が変化する例）

衛星を加減速する時に、近くを運動している惑星の引力を利用して極力燃料を消費せずに速度や軌道を変える方法がある。これをスイングバイといい、運動方程式にルンゲ・クッタ法を用いて軌道のシミュレーションを行う場合を考える。ここでは地球を用いた衛星のスイングバイを考え、各初期条件を以下のように設定する。また、タイムステップは30[s]とした。

衛星の質量：1500[kg] (=m)

衛星の初期座標： $(5.0 \times 10^5, 4.0 \times 10^4)$ [km]

衛星の初速： $(-500, -1000)$ [m/s]

地球の質量： 5.972×10^{24} [kg] (=M)

地球の初期座標：原点

地球の初速： $(30, 0.0)$ [km/s]

万有引力定数： 6.67408×10^{-11} [$\text{m}^3/(\text{kg s}^2)$] (=G)

この問題を解く際には、質量 m [kg]の衛星と質量 M [kg]の運動する惑星の2つの運動を考える必要があり、それぞれ必要となるベクトル関数 $\mathbf{g}_m(t, \mathbf{h})$ 及び $\mathbf{g}_M(t, \mathbf{h})$ は以下のようになる。

$$\mathbf{g}_m(t, \mathbf{h}) = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_m(t, \mathbf{h}) \\ \mathbf{f}_m(t, \mathbf{h}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{mx}/m \\ p_{my}/m \\ p_{mz}/m \\ GMm \left\{ \frac{(x_M - x_m)}{|\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_m|^3} \right\} \\ GMm \left\{ \frac{(y_M - y_m)}{|\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_m|^3} \right\} \\ GMm \left\{ \frac{(z_M - z_m)}{|\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_m|^3} \right\} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{g}_M(t, \mathbf{h}) = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_M(t, \mathbf{h}) \\ \mathbf{f}_M(t, \mathbf{h}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{Mx}/M \\ p_{My}/M \\ p_{Mz}/M \\ -GMm \left\{ \frac{(x_M - x_m)}{|\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_m|^3} \right\} \\ -GMm \left\{ \frac{(y_M - y_m)}{|\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_m|^3} \right\} \\ -GMm \left\{ \frac{(z_M - z_m)}{|\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_m|^3} \right\} \end{pmatrix}$$

ルンゲ・クッタ関数において演算を行う場合は、これら2つをまとめて次のようにする。

$$\mathbf{g}(t, \mathbf{h}) = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_m(t, \mathbf{h}) \\ \mathbf{f}_m(t, \mathbf{h}) \\ \mathbf{v}_M(t, \mathbf{h}) \\ \mathbf{f}_M(t, \mathbf{h}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_m/m \\ GMm \left\{ \frac{(\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_m)}{|\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_m|^3} \right\} \\ p_M/M \\ -GMm \left\{ \frac{(\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_m)}{|\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_m|^3} \right\} \end{pmatrix}$$

シミュレーション結果は図4. 8～図4. 10に示す通りで、衛星が地球に衝突せず増速している事が分かる。また、このシミュレーションにおいて要所での各座標は以下の通りである。

最近接：16380[s]

衛星 (x=490660[km], y=23181[km])、地球 (x=491400[km], y=1.10×10⁻¹⁹[km])

衛星がx軸を横切る：27540[s]

衛星 (x=484530[km], y=20.506[km])、地球 (x=826200[km], y=3.12×10⁻¹⁸[km])

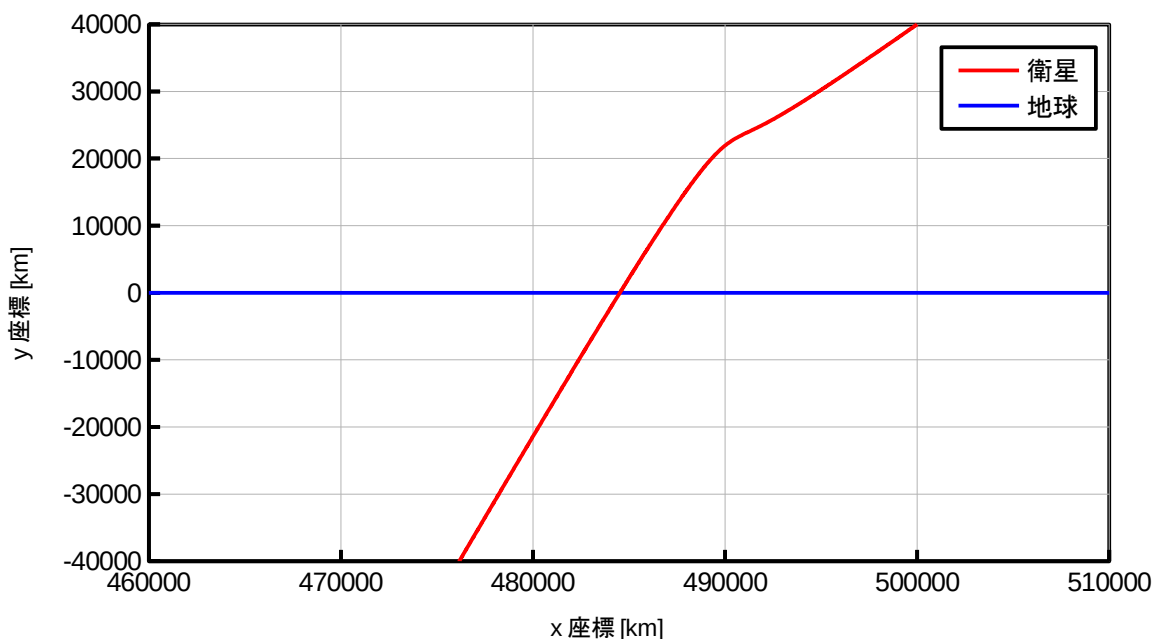


図4. 8 衛星と地球の軌道

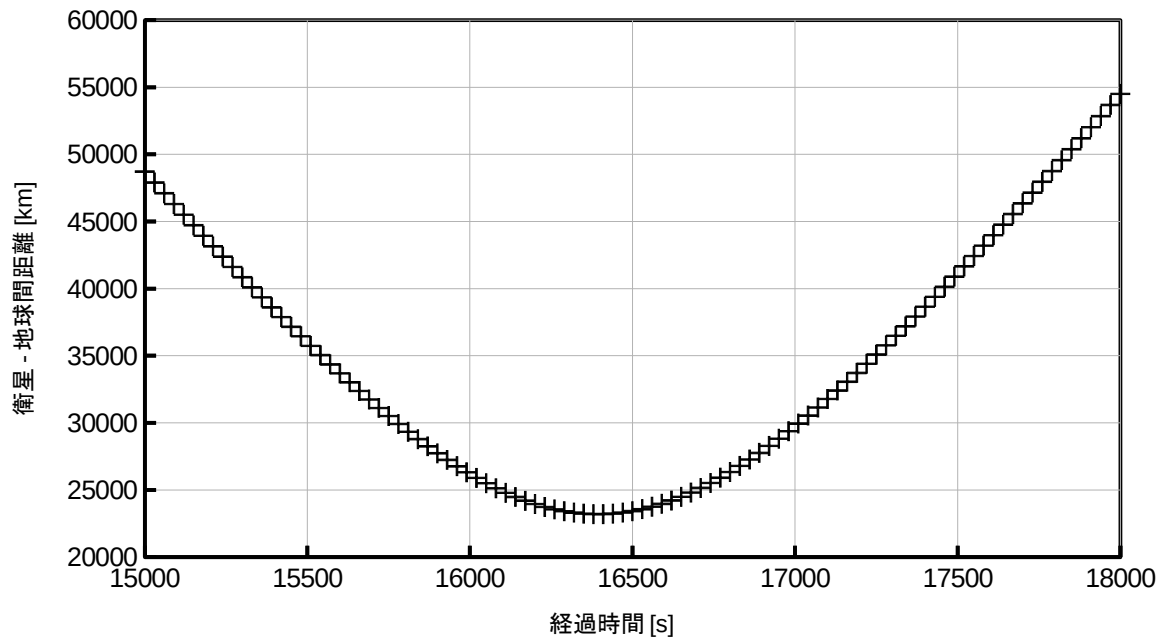


図4. 9 衛星と地球の間の距離の時間変化（衝突していない事の確認）

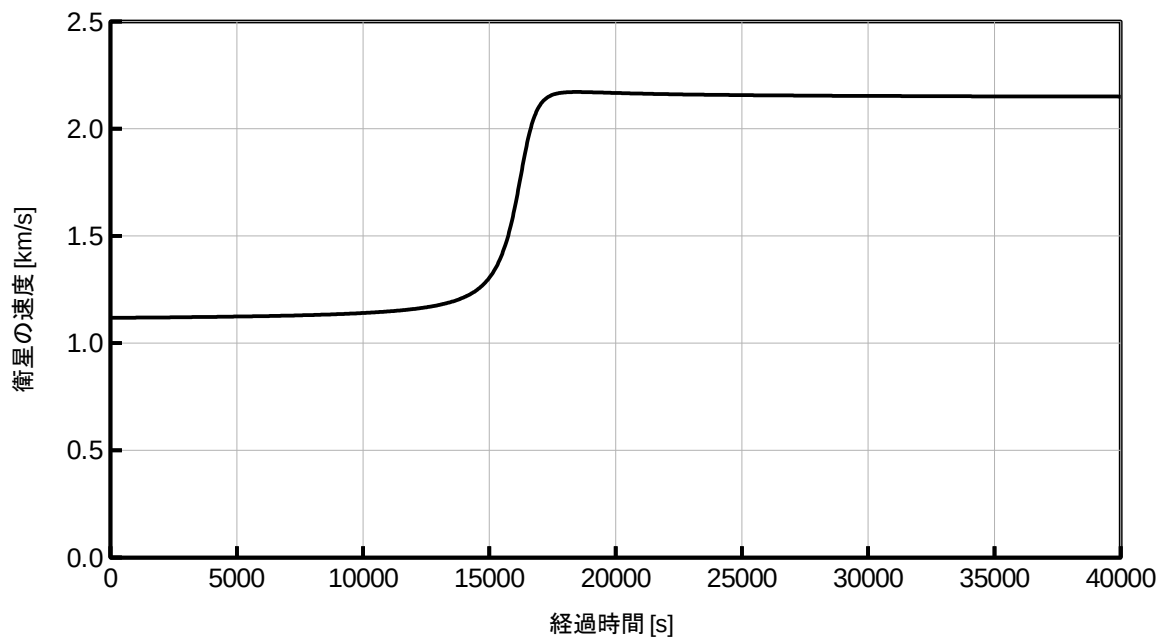


図4. 10 衛星の速度の時間変化（増速している事の確認）

5. 考察(Discussion)

ルンゲ・クッタ法を適用した質点の運動シミュレーションの結果はどの例においても理論解に十分近いものであった。特にE×Bドリフトについては、自著「静的電磁場中における荷電粒子の運動」におけるオイラー法の結果よりも発散せず安定した結果を得る事ができた。実装に関してはオイラー法の方がより単純ではあるが、ルンゲ・クッタ法の方がタイムステップの時間を少し長めにしてもかなり安定しており、長時間のシミュレーションを取り扱う場合を考えれば、明らかにルンゲ・クッタ法に分がある。

6. 結言(Summary)

今後は多体問題の運動シミュレーションやPID制御シミュレーションも行いたいと考えており、本稿で扱ったルンゲ・クッタ法を上手に実装して、多様な数値解析プログラムを開発していきたいと思う。

7. 文献(References)

- [1] : C言語による数値計算入門 皆本晃弥著 サイエンス社
- [2] : 工学基礎 数値解析とその応用 久保田光一著 数理工学社
- [3] : セミナーライブラリ 物理学=2 演習 力学[新訂版] 今井功、他共著 サイエンス社
- [4] : 物理入門コース3 電磁気学I 電場と磁場 長岡洋介著 岩波書店
- [5] : https://en.wikipedia.org/wiki/Runge-Kutta_methods
- [6] : https://en.wikipedia.org/wiki/Gravity_assist
- [7] : 明解 C言語入門編 柴田望洋著 SoftBank Creative

8. 著者(Author)

氏名：志多 友史 (工学修士)

略歴：

2011年：下位国立大学 工学部電気系学科卒業

2013年：同大学大学院 工学研究科修了

2013年：研究開発機関へ就職

興味：物理・数学・コンピュータ・電気電子工作

9. 備考(Notes)

特になし。