

差分法を用いた二次元電位分布解析

Two-dimensional electric potential distribution analysis by FDM

Author : 志多 友史 (Yuji Shida)

Date : 2017/7/15

Keywords : 差分法(FDM: Finite Difference Method), ラプラス方程式(Laplace's equation), 電位(electric potential), 電場(electric field), C 言語(C programming language), 数値計算(numerical calculation), 三相交流(three phase current), 電線(electric wire)

Abstract:=====

本稿では電磁場解析の初歩として、二次元平面における静電位の解析を取り扱う。内容としては境界電位が与えられ、かつ電荷の存在しない平面内における電位を差分法（ラプラス方程式を離散化する方法）により算出するというものである。また、算出された電位分布から電場の様相も計算する。

In this report, I tried to analysis of the static electric potential in the two-dimensional plane as first step of electro-magnetic field analysis. The content is two-dimensional electric potential analysis by Finite Difference Method (method with discretization of Laplace's equation), under the conditions that boundary potential given, and there is no electric charge. And, using electric potential distribution which was calculated, electric field was calculated.

1. 序論(Introduction)

電磁気学の分野に限らず熱伝導解析や数値流体力学においても、与えられた境界条件の下で偏微分方程式を解く事は非常に多い。実問題においては、この偏微分方程式が解析的に解ける事はまず無く、空間や境界面を有限の要素に分割し、計算機が取扱可能な四則演算に問題を噛み砕いてから計算を行う。本稿は初歩的な問題に対する計算プログラムを作成し、今後の大規模計算・時間領域の問題解決に向けた基礎を習得するために作成したものである。

2. 理論(Theory)

本解析プログラムで用いる基礎理論について以下に記す。

2. 1. 静電場の支配方程式

ベクトル解析において、三次元空間の任意のベクトル場は Helmholtz の定理によりスカラーポテンシャル $\Phi(\mathbf{r})$ とベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ の偏微分の和で表す事ができる。

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r}) + \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$$
$$\nabla \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

本稿で取り扱う静電場は渦無しの保存場である事から、この定理よりスカラーポテンシャルを用いて電場を表現する事が可能であるという事が分かる。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r})$$

また、Maxwell 方程式から電荷密度を $\rho(\mathbf{r})$ 、誘電率を ϵ とおくと、電場とこれらの関係は下式のように表される。

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon}$$

ここでスカラーポテンシャルの式と電場・電荷の関係式から次式が導かれ、この偏微分方程式が本稿で作成するプログラムで取扱う基礎方程式となる。

$$-\nabla \cdot \nabla \Phi(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon} \quad \text{i.e.} \quad -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon}$$

2. 2. 支配方程式の離散化

前節で記した基礎方程式 (Poisson 方程式) を計算機で取扱可能にするため、本節ではこの方程式の離散化について記す。まず x 成分のみを離散化すると次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial x} \Phi(\mathbf{r}) \approx \frac{\Phi(x+\Delta x/2, y, z) - \Phi(x-\Delta x/2, y, z)}{\Delta x}$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{\Delta x} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{x+\Delta x/2} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{x-\Delta x/2} \right\}$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi(\mathbf{r}) \approx \frac{\{\Phi(x+\Delta x, y, z) + \Phi(x-\Delta x, y, z) - 2\Phi(x, y, z)\}}{(\Delta x)^2}$$

同様に3つの成分全てを整理すると次のようになる。

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi(\mathbf{r}) \approx \frac{\{\Phi(x+\Delta x, y, z) + \Phi(x-\Delta x, y, z) - 2\Phi(x, y, z)\}}{(\Delta x)^2}$$
$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \Phi(\mathbf{r}) \approx \frac{\{\Phi(x, y+\Delta y, z) + \Phi(x, y-\Delta y, z) - 2\Phi(x, y, z)\}}{(\Delta y)^2}$$
$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \Phi(\mathbf{r}) \approx \frac{\{\Phi(x, y, z+\Delta z) + \Phi(x, y, z-\Delta z) - 2\Phi(x, y, z)\}}{(\Delta z)^2}$$

本稿においては電荷の存在しない二次元平面での電位分布解析を行うので、電荷密度については $\rho(\mathbf{r})=0$ となって方程式は Laplace 方程式の形となり、また $\frac{\partial}{\partial z}$ の掛かる項は考えなくても良いので、

最終的に方程式は次のようになる。

$$-\frac{\Phi_{x+\Delta x} + \Phi_{x-\Delta x}}{(\Delta x)^2} - \frac{\Phi_{y+\Delta y} + \Phi_{y-\Delta y}}{(\Delta y)^2} + 2\Phi \left\{ \frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} \right\} = 0$$

さらに $\Delta x = \Delta y$ として整理すると下式が導かれる。

$$\Phi = \frac{1}{4} (\Phi_{x+\Delta x} + \Phi_{x-\Delta x} + \Phi_{y+\Delta y} + \Phi_{y-\Delta y})$$

これは下図に示すようにある点の電位は、隣り合う4つの点の電位を平均した値になるという事と同義である。

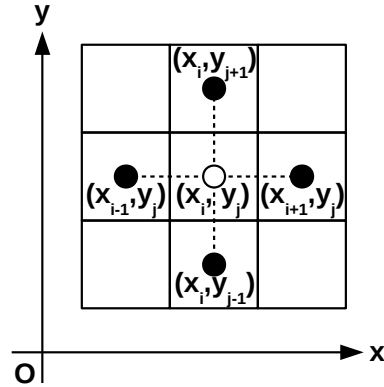
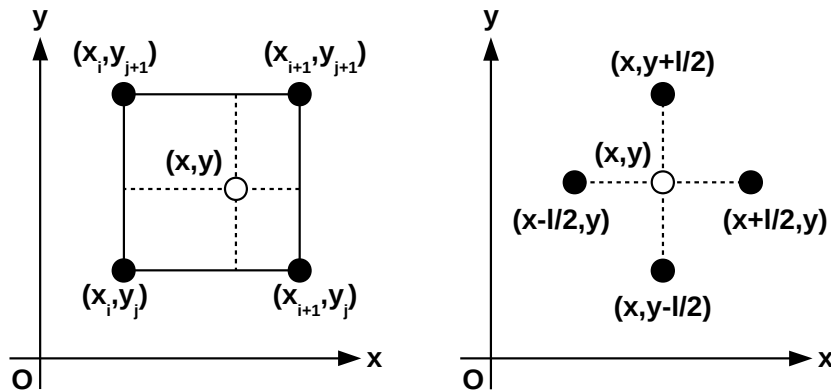


図2. 1 差分法による電位の計算

2. 3. 任意の座標の電位・電場の計算

前節では離散化された座標上（格子点上）における電位の計算方法について記したが、求めたい電位の座標が必ずしも格子点の座標になるとは限らないので、線形補間によってこれを求める方法を記す。



(a)電位の計算

(b)電場の計算

図2. 2 線形補間による電位の計算と電場の計算

図2. 2(a)のような状況を考える。まず電位を求めたい座標 (x,y) の近傍にある格子点の電位を用いて辺 $(x_i, y_j)-(x_{i+1}, y_j), (x_i, y_{j+1})-(x_{i+1}, y_{j+1})$ 上で補間を行うと

$$\Phi(x, y_j) = \frac{\Phi(x_{i+1}, y_j) - \Phi(x_i, y_j)}{x_{i+1} - x_i} (x - x_i) + \Phi(x_i, y_j)$$

$$\Phi(x, y_{j+1}) = \frac{\Phi(x_{i+1}, y_{j+1}) - \Phi(x_i, y_{j+1})}{x_{i+1} - x_i} (x - x_i) + \Phi(x_i, y_{j+1})$$

さらに、この二式を用いて座標 (x,y) の電位を求めると次のようになる。

$$\Phi(x, y) = \frac{\Phi(x, y_{j+1}) - \Phi(x, y_j)}{y_{j+1} - y_j} (y - y_j) + \Phi(x, y_j)$$

なお、先に辺 $(x_i, y_j)-(x_i, y_{j+1}), (x_{i+1}, y_j)-(x_{i+1}, y_{j+1})$ 上での補間を行っても同じ結果となる。

次に電場の計算方法について記す。電場は電位の勾配によって表されるが、差分法の計算結果として求められる電位は格子点上にしか存在しないので、電場の計算では若干の工夫が必要である。本稿では図2. 2(b)に示すように、電場を求めたい座標に対して $\Delta l/2(=\Delta x/2, \Delta y/2)$ ずらした座標における電位を求め、次のように電場を計算する。

$$E_x = -\frac{\Phi(x+\Delta l/2, y) - \Phi(x-\Delta l/2, y)}{\Delta l}$$

$$E_y = -\frac{\Phi(x, y+\Delta l/2) - \Phi(x, y-\Delta l/2)}{\Delta l}$$

2. 4. 電流の計算

本稿で作成するプログラムでは、電場を求めるサブルーチンも作成するので、この応用として閉じた領域から湧き出す電流（或いは流れ込む電流）を計算するサブルーチンの作成を行った。電流計算サブルーチンの使用例として図2. 3(a)のように2本の芯線を持つケーブルの断面を考え、片方の芯線からリークする電流を算出する場合等が考えられる。

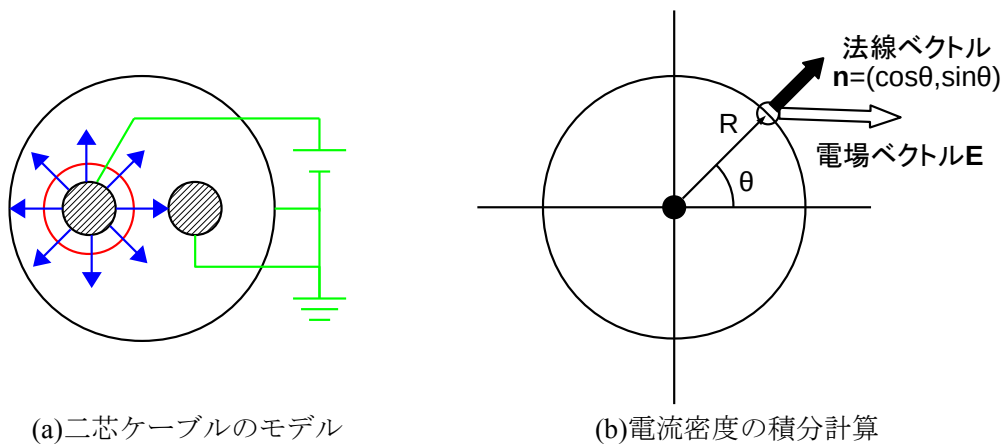


図2. 3 電場と電流の算出

電流計算サブルーチンでは図2. 3(b)のように、境界面上（円周上）の電流密度の積分を行う。材料の導電率を σ とおくと、電流密度は $\mathbf{i} = \sigma \mathbf{E}$ と表される。また、円周上の法線ベクトルを \mathbf{n} とおくと、外側へ湧き出す電流は次のように表される。

$$I = \sigma \int_C \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} ds$$

ここで、境界円の半径を R 、中心座標を (x_0, y_0) とおくと上式は次のように書換えられる。

$$I = \sigma \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} (\cos \theta, \sin \theta) \cdot \mathbf{E}(x_0 + R \cos \theta, y_0 + R \sin \theta) R d\theta$$

2. 5. 三相交流電圧の設定

本稿では時間変化する境界電位の例として、三相交流電圧を取り扱う。本節ではその基礎知識を整理する。三相交流電圧は線間電圧の位相がそれぞれ $2\pi/3(\text{rad})$ ずつずれた3つの交流電圧によって構成されており、電力輸送の面において単相交流よりも優れ、また容易に電動機で用いる回転磁界を作り出す事ができる。この三相交流電力の送配電では、変圧器による電圧変換が何度も行われており、この変圧器の結線方法には主に下記に記す二種類の接続方法がある。

(1) スター型結線 (Y型結線)

主に高圧送電線等で用いられる結線方法 (Y-Y- Δ 結線等) で、特殊な場合を除いて低圧系統にこの結線方法が用いられる事はほとんど無い。利点としては中性点の接地が可能である事、線間電圧を大きくする事ができる（電流を小さくしジュール損を低減する事ができる）等である。中性点を基準として各相電圧が対称であり、各電位は次のように表される。なお、式中の f は周波

数(Hz)、 V_e は線間実効電圧(V)、 V_g は基準電位(V)である。

$$V_{ag}(t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} V_e \cos(2\pi f t) + V_g, \quad V_{bg}(t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} V_e \cos(2\pi f t - 2\pi/3) + V_g$$

$$V_{cg}(t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} V_e \cos(2\pi f t - 4\pi/3) + V_g$$

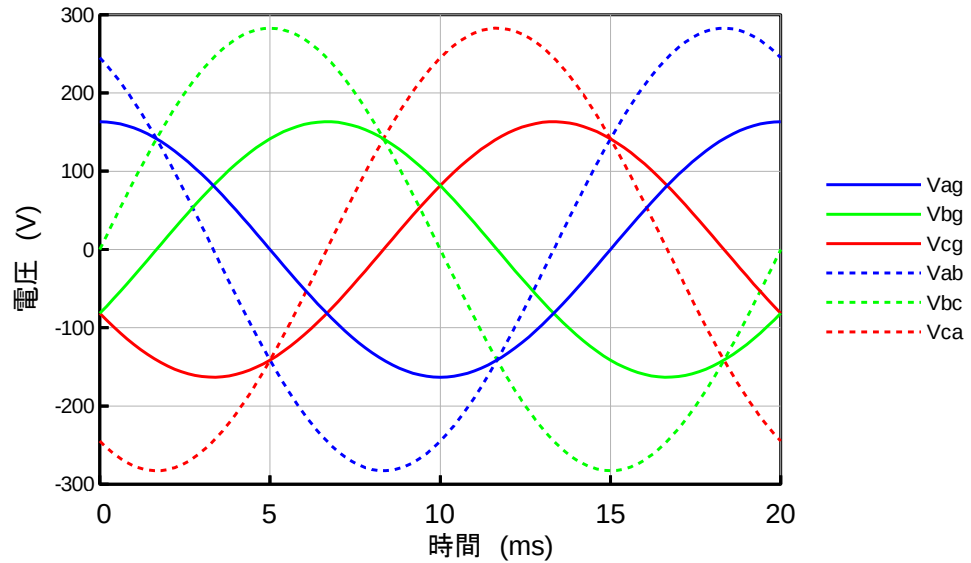


図2. 4 スター型結線時の対地相電位と線間電圧 (実効電圧 200(V),周波数 50(Hz))

(2) デルタ型結線 (Δ型結線)

主に低圧系統の配線に用いられ、第三次高調波電流を低減できる。また、変圧器を1つ取り除いてV結線にする事ができる等の利点がある。しかし、前述のスター型結線とは異なり、中性点がなく、大抵の場合、電気設備の安全のため、三相の内1つの相 (S相) が接地されている。従って、各相の対地電位は非対称となり、次のように表される。

$$V_{ag}(t) = \sqrt{2} V_e \cos(2\pi f t) + V_g, \quad V_{bg}(t) = V_g$$

$$V_{cg}(t) = -\sqrt{2} V_e \cos(2\pi f t - 2\pi/3) + V_g$$

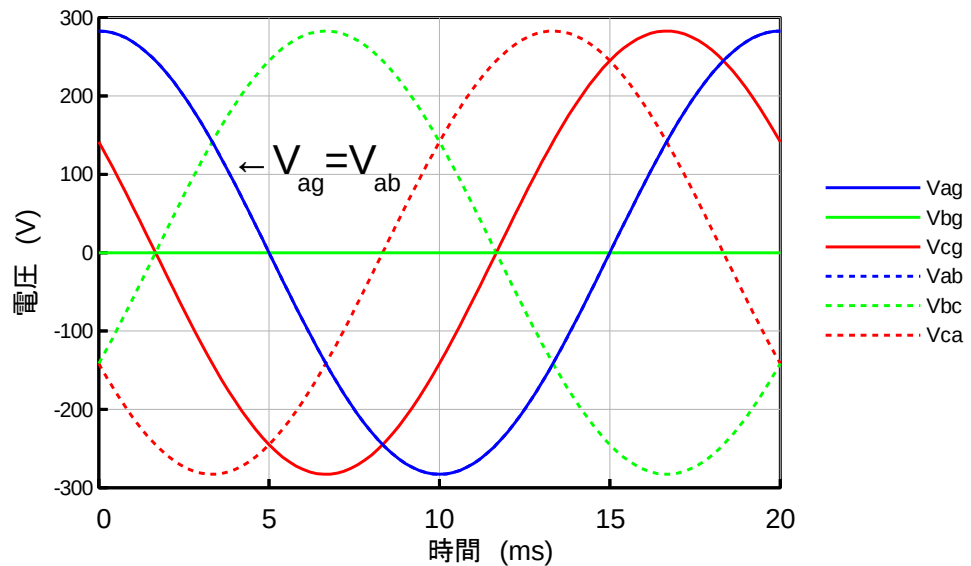


図2. 5 デルタ型結線時の対地相電位と線間電圧 (実効電圧 200(V),周波数 50(Hz))

3. 方法(Method)

前章で示した基礎理論を基に数値解析プログラムを具体的に作り上げる。

3. 1. プログラムの仕様

本プログラムを作成する上で軸となる事柄を下記に示す。

- 二次元の計算プログラム
- 円筒、長方形の基本形状の関数を用意する。
- 境界電位が低周期で変化するモデルを取り扱えるようにする。
- 時間領域（電磁波、分布定数）の問題は取り扱わない。
- 設定・保守が容易である事。
- モデル形状・境界条件等をログファイルに出力する。

3. 2. 各関数の関係

作成したプログラムを構成する関数を表 3. 1、グローバル変数を表 3. 2に示す。また、各関数の関係を図 3. 1に示す。

表 3. 1 二次元電位分布解析プログラムを構成する関数群

番号	関数宣言
1	int main(void)
基本関数	
2	void init_setting(void)
3	void AC_volt(int num0,double bvg,double bve,double bfrq,double btm,int num1, int num2,int num3)
4	void init_volt(void)
5	void FDM2D_calc(void)
6	void output(int num0,int bdn,char *bfn)
境界条件設定関数	
7	void outermost(int num0)
8	void cylinder(int num0,double bdl,double bxo,double byo,double bri)
9	void rectangle(int num0,double bdl,double bx0,double by0,double bx1,double by1)
10	void electric_wires(int num0,int num1,double bxo,double byo,double brc,double brw)
11	void cylindrical_capacitor(void)
12	void TPACEW(void)
13	void simple_experiment(void)
各種計算関数	
14	double volt_calc(double bx,double by)
15	void EF_calc(double bx,double by,double *bex,double *bey)
16	void EF_calc_full(void)
17	void reply_mode(void)
18	double current_calc(int bdv,double bsg,double bxo,double byo,double br)

表 3. 2 グローバル変数

番号	変数名	役割
1	NN	解析領域（正方形）の一辺の最大分割数
2	BN	境界条件（既知電位）の最大数
3	*fp	ログファイル用ファイルポインタ
4	NOD	実計算に使用される解析領域の一辺の要素数（ \leq NN）
5	IOC	収束判定の実行インターバル
6	SOL	解析領域の一辺の長さ
7	SOP	メッシュの一辺の長さ
8	COE	収束判定の条件値
9	bvl[]	境界電位
10	bcn[][]	格子点(i,j)に設定された境界条件の番号
11	vol[][][]	格子点(i,j)の電位 [0][][]：境界条件、[1][],[2][][]：計算用
12	pox[],poy[]	格子点(i,j)の位置
13	efx[],efy[]	格子点(i,j)における電場

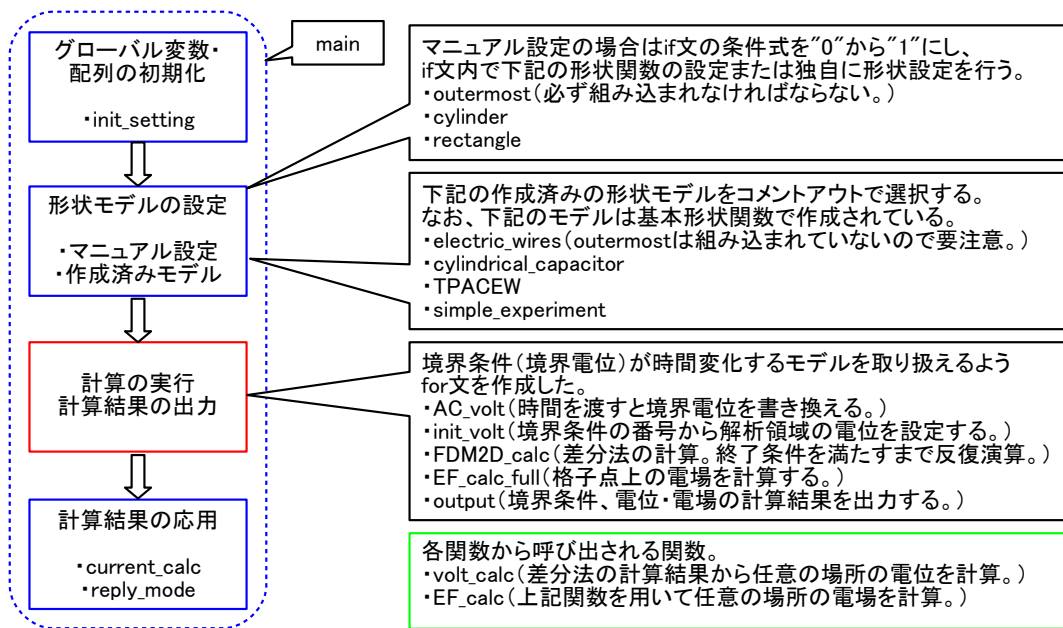


図 3. 1 各関数の関係

本プログラムは、開始と同時にログファイルの作成と関数 `init_setting` 内においてグローバル変数・配列の初期化及び、`main` 関数内で設定されたグローバル変数に従って解析領域の構築が行われる。その後、形状関数によるモデルの構築と境界電位の設定が行われる。

モデルの設定では、関数 `init_setting` 内で設定された全ての格子点(`pox[i][j],poy[i][j]`)に対して、この格子点が当該モデル形状に含まれる場合、同じ添字の境界条件番号配列 `bcn[i][j]` に形状関数の引数である境界番号を設定する。また、格子点の電位は境界電位配列 `bvl[]` で設定される。従って、(i,j)番目の格子点（位置(`pox[i][j],poy[i][j]`））の電位は `bvl[bcn[i][j]]` と表される。なお、`bcn[i][j]` が"0"と設定された格子点は差分法による逐次演算の対象となり、それ以外の格子点では演算を行わない。

モデルと境界電位の設定後は、関数 `init_volt` により、電位計算用配列 `vol[][][]` に電位 `bvl[bcn[i][j]]` が設定された後、関数 `FDM2D_calc` で逐次演算が行われる。関数 `FDM2D_calc` 内では `bcn[i][j]` が"0"の格子点のみ演算が行われ、`main` 関数で設定された `IOC`(Interval of Check)の回数毎に収束判定を行う。計算終了後は、各種計算結果の出力等を行う。

境界電位が変化する計算モデルを扱う場合は、境界電位配列 `bvl[]` を変更した後、再度、関数 `init_volt` と `FDM2D_calc` を実行する。なお、計算を行う時間の範囲とタイムステップについては `main` 関数内の `ndt` (開始時刻から終了時刻までの時間の分割数) 及び `start_t, end_t` (開始時刻、終了時刻) で設定が可能である。

3. 3. 境界電位モデル (作成済みモデルの説明)

本プログラムでは解析領域に境界条件を設定するための基本的な形状関数を作成した。以下に形状関数の詳細について記す。形状モデルの設定では、関数 `init_setting` で作られた格子点の座標 (`pox[i][j]`, `poy[i][j]`) が形状関数の条件に合致した時、同じ添え字の境界条件番号配列 `bcn[i][j]` に当該形状モデル関数の引数である境界番号が設定される。また当該格子点における電位は境界電位配列 `bvl[]` で与えられる。

- 解析領域端設定関数 "outermost" : 最外領域の境界条件を設定する。
- 円筒形状設定関数 "cylinder" : 円筒形状モデルを設定する。
- 長方形枠形状設定関数 "rectangle" : 長方形枠形状モデルを設定する。
- 多芯電線形状設定関数 "electric_wires" : 複数の電線形状モデルを設定する。
- 円筒コンデンサ設定関数 "cylindrical_capacitor" : 同心の2つの円筒形状モデルを設定する。
- 三相交流電線設定関数 "TPACEW" : 3本の芯線とその周囲を取り囲む被覆モデルを設定する。
- 簡易実験用関数 "simple_experiment" : 1つの円筒形状モデルとそれを取り囲むように長方形枠形状モデルを設定する。

(1) 解析領域端設定関数 "outermost"

本関数は解析領域において、最外領域の境界条件を設定する事を目的とした関数である。差分法による演算においては計算を行う位置に隣接する値を用いるが、解析領域の端及び角ではこの演算を行う事ができないので、実際の演算可能領域は最外領域の1メッシュ手前までとなる。最外領域については演算を行わず、境界条件として決まった電位を設定する必要がある。

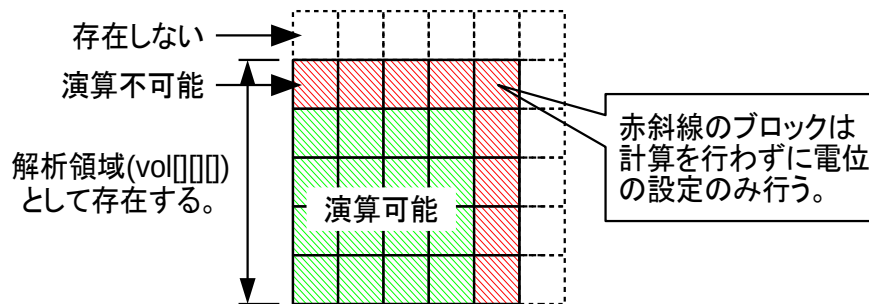


図 3. 2 解析領域端の設定

(2) 円筒形状設定関数 "cylinder"

本関数は解析領域に円筒形状モデルを設定する関数である。引数は下記の通りで、各引数と形状モデルの対応は図 3. 3 に示す通りである。

`cylinder` (境界番号、円筒の厚み、円筒の中心座標の x 成分、同 y 成分、円筒の内径)

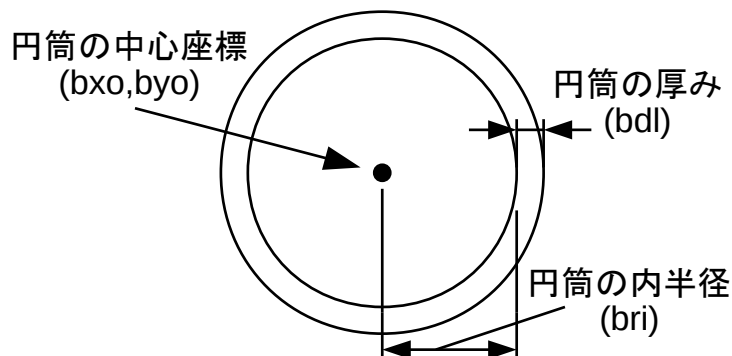


図 3. 3 円筒形状の設定

(3) 長方形枠形状設定関数"rectangle"

本関数は解析領域に長方形枠形状モデルを設定する関数である。引数は下記の通りで、各引数と形状モデルの対応は図3. 4に示す通りである。

rectangle (境界番号、枠の厚み、2か所の内角の座標(bx0,by0,bx1,by1))

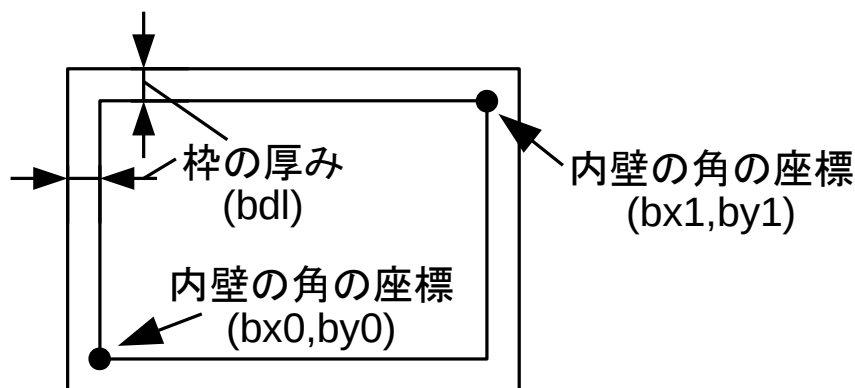


図3. 4 長方形枠形状の設定

(4) 多芯電線形状設定関数"electric_wires"

本関数は解析領域に複数の電線形状モデルを設定する関数である。この関数では円筒形状設定関数"cylinder"を用いて同一円周上に肉厚の円筒モデル(電線)を作成する。引数は下記の通りで、各引数と形状モデルの対応は図3. 5に示す通りである。

electric_wires (開始境界番号、本数、中心軸の座標(bxo,byo)、中心軸からの電線の位置 brc、電線の半径 brw)

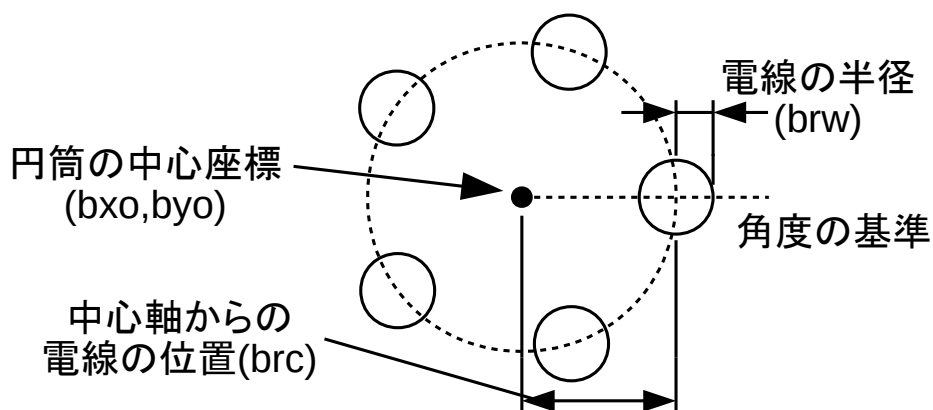


図3. 5 多芯電線の設定 (芯線数5本)

(5) 円筒コンデンサ設定関数"cylindrical_capacitor"

本関数は解析領域に2つの円筒形状モデルを設定する関数である。モデルの設定では当関数内のパラメータを適宜操作する。形状モデルは図3. 6(a)に示す通りである。

(6) 三相交流電線設定関数"TPACEW"

本関数は解析領域に3本の芯線とその周囲を取り囲む被覆モデル(円筒形状モデル)を設定する関数である。モデルの設定では当関数内のパラメータを適宜操作する。形状モデルは図3. 6(b)に示す通りである。

(7) 簡易実験用関数"simple_experiment"

本関数は解析領域に1つの円筒形状モデルとそれを取り囲むように長方形枠形状モデルを設定する関数である。モデルの設定では当関数内のパラメータを適宜操作する。形状モデルは図3. 6(c)に示す通りである。

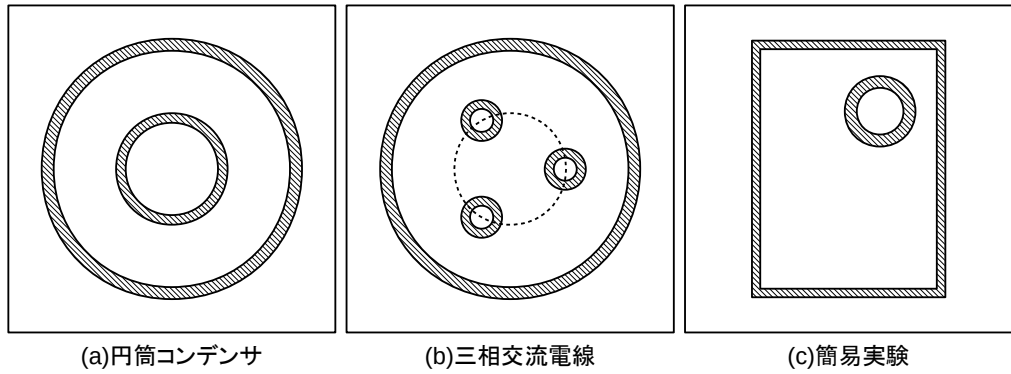


図 3. 6 作成済みモデル

3. 4. 各関数の詳細説明

各関数の仕様を以下に示す。

関数名	main
役割	プログラムの全体の流れを制御する。
引数	なし
返却値	"0"
参照する変数	NN, BN
書換える変数	fp, NOD, IOC, SOL, COE, bvl[]
備考	ログファイルの作成・終了を行う。 ログファイルへの書き込みあり。 使用配列が設定した値(NN)よりも大きいときは強制終了する。

関数名	init_setting
役割	グローバル変数の初期化及び格子点(pox[[]], poy[[]])の設定を行う。
引数	なし
返却値	なし
参照する変数	NN, BN, NOD, IOC, SOL, COE
書換える変数	SOP, bvl[], bcn[[]], vol[[][]], pox[[]], poy[[]], efx[[]], efy[[]]
備考	ログファイルへの書き込みあり。

関数名	AC_volt
役割	引数で指定された境界番号の電位 <code>bvl[]</code> に交流電圧を設定する。
引数	<p><code>num0</code> : モード設定。 <code>bvg, bve</code> : 接地点電位及び実効電圧。 <code>bfrq, btm</code> : 交流電圧の周波数及び時刻。 <code>num1, num2</code> : 1つ目及び2つ目の境界番号。 <code>num3</code> : 3つ目の境界番号。(単相の場合は任意の値を設定。)</p>
返却値	なし
参照する変数	なし
書換える変数	<code>bvl[]</code>
備考	<p>引数を与えると対応する境界電位配列 <code>bvl[]</code> を書換える。モード設定の値と動作は下記の通り。</p> <p>1 : 非接地単相交流。 2 : 接地単相交流。<code>bvl[num2]</code> が接地電位となる。 3 : 接地スター型三相交流。中性点電位が接地電位となる。 4 : 接地デルタ型三相交流。<code>bvl[num2]</code> が接地電位となる。</p>

関数名	init_volt
役割	解析領域の電位配列 <code>vol[][][]</code> に境界条件番号配列 <code>bcn[][]</code> に対応した電位 <code>bvl[]</code> を設定する。
引数	なし
返却値	なし
参照する変数	<code>NOD, bcn[][]</code> , <code>bvl[]</code>
書換える変数	<code>vol[][][]</code>
備考	特になし。

関数名	FDM2D_calc
役割	差分法による逐次演算を行う。
引数	なし
返却値	なし
参照する変数	<code>NOD, IOC, COE, M_epsilon, bcn[][]</code>
書換える変数	<code>vol[][][]</code>
備考	<p><code>while</code> 文内が1周すると2回差分法の演算が行われる。 <code>IOC</code> 回毎(差分法の演算回数としては $2 * IOC$ 回毎)に収束判定が行われ、<code>vol[1][][]</code> と <code>vol[2][][]</code> の差が終了条件 <code>COE</code> 以下または前回の収束判定時の差と僅差 (<code>M_epsilon</code> 以下) であれば <code>while</code> ループが終了する。</p>

関数名	output
役割	ファイル名を受け取り、対応するデータの出力を行う。
引数	num0 : モード設定。 bdn : 出力する値の間隔。 bfm : ファイル名。
返却値	なし
参照する変数	NOD, pox[[[]], poy[[[]], vol[0][[]], vol[1][[]], efx[[[]], efy[[[]]
書換える変数	なし
備考	モード設定の値と動作は下記の通り。 0 : 境界条件（初期電位）の出力。 1 : 電位の計算結果 vol[1][[]]の出力。 2 : 電場の計算結果の出力。

関数名	outermost
役割	解析領域の端の4辺に境界番号を設定する。
引数	num0 : 境界番号。
返却値	なし
参照する変数	NOD
書換える変数	bcn[[[]]
備考	ログファイルへの書き込みあり。

関数名	cylinder
役割	解析領域に円筒モデルの境界番号を設定する。
引数	num0 : 境界番号。 bdl : 円筒の厚み。 bxo, byo : 円筒の中心座標。 bri : 円筒の内径。
返却値	なし
参照する変数	NOD, pox[[[]], poy[[[]]
書換える変数	bcn[[[]]
備考	ログファイルへの書き込みあり。

関数名	rectangle
役割	解析領域に長方形枠モデルの境界番号を設定する。
引数	num0 : 境界番号。 bdl : 枠の厚み。 bx0, by0 : 内側の4つの角の内、x座標、y座標共に最小の角の位置。 bx1, by1 : 内側の4つの角の内、x座標、y座標共に最大の角の位置。
返却値	なし
参照する変数	NOD, pox[[]], poy[[]]
書換える変数	bcn[[]]
備考	ログファイルへの書き込みあり。

関数名	electric_wires
役割	解析領域に多芯電線モデルの境界番号を設定する。
引数	num0 : 境界番号。多芯の場合、連番(num0~num0+num1-1)の最初の番号。 num1 : 電線の本数。 bxo, byo : 中心軸の座標。 brc : 中心軸からの電線の位置。num1が"1"の時は、中心軸上に電線が1本設定される。 brw : 電線の半径。
返却値	なし
参照する変数	なし
書換える変数	なし
備考	ログファイルへの書き込みあり。 "cylinder"に適切な値を渡し、多芯電線モデルを作成する。

関数名	cylindrical_capacitor
役割	解析領域に円筒コンデンサモデルの境界番号を設定する。
引数	なし
返却値	なし
参照する変数	なし
書換える変数	bvl[]
備考	ログファイルへの書き込みあり。 基本形状関数で構成されている。

関数名	TPACEW
役割	解析領域に三相交流用電線モデルの境界番号を設定する。
引数	なし
返却値	なし
参照する変数	なし
書換える変数	bvl[]
備考	ログファイルへの書き込みあり。 基本形状関数で構成されている。 "TPACEW"は"Three-Phase Alternating Current Electric Wires"の略。

関数名	simple_experiment
役割	解析領域に簡易実験モデル（長方形枠の中に円筒を設置。）の境界番号を設定する。
引数	なし
返却値	なし
参照する変数	なし
書換える変数	bvl[]
備考	ログファイルへの書き込みあり。 基本形状関数で構成されている。

関数名	volt_calc
役割	座標を受け取り、電位を計算・返却する。
引数	bx, by : 電位を取得したい場所の座標。
返却値	電位
参照する変数	NOD, SOL, SOP, pox[[]], poy[[]], vol[1][[]]
書換える変数	なし
備考	解析領域外の座標が入力された場合、vol[0][0][0]が返却される。

関数名	EF_calc
役割	座標を受け取り、電場を計算・返却する。
引数	bx, by : 電場を取得したい場所の座標。 &bex, &bey : 電場の各成分の格納先のアドレス。
返却値	なし
参照する変数	SOP
書換える変数	なし
備考	"volt_calc"に適切な値を渡し、電場の計算を行う。

関数名	EF_calc_full
役割	解析領域の全格子点上の電場の計算を行う。
引数	なし
返却値	なし
参照する変数	NOD, pox[[[]], poy[[[]]
書換える変数	efx[[[]], efy[[[]]
備考	"EF_calc"に適切な値を渡し、計算を行う。

関数名	reply_mode
役割	計算結果を用いて任意の座標における電位・電場を出力する。
引数	なし
返却値	なし
参照する変数	なし
書換える変数	なし
備考	ログファイルへの書き込みあり。 "volt_calc"及び"EF_calc"に値を渡し、計算結果の出力を行う。

関数名	current_calc
役割	円筒境界面（円）を貫く電流の総和を計算する。
引数	bdv：円筒の分割数。 bsg：導電率。 bxo, byo：円筒の中心位置。 br：円筒の半径。
返却値	電流値
参照する変数	なし
書換える変数	なし
備考	特になし。

4. 結果(Results)

前章で作成したプログラムの実行結果を示す。なお、計算結果の数値的な比較は円筒コンデンサモデルに対してのみ行い、他のモデルについては結果のみを示すことに留める。

4. 1. 円筒コンデンサ

解析領域に内径 200(mm)の外筒電極と外径 60(mm)の内筒電極を作成し、100(V)の電位差（内筒電極 100(V)、外筒電極 0(V)）を与えた場合の計算結果と理論解のグラフを図 4. 1 及び図 4. 2 に示す。このグラフでは横軸が円筒中心からの距離で、縦軸が電位及び電場の大きさである。また、電極間の導電率を 1.0 とした時の電流の計算結果を表 4. 1 に示す。

なお、電位と電場の大きさの理論解は下式のように表される。式中の V_d は電位差、 r_i, r_o は内筒の外径及び外筒の内径、 V_g はオフセット電位（外筒の電位）である。

$$V(r) = V_d \left(1 - \frac{\ln(r/r_i)}{\ln(r_o/r_i)} \right) + V_g$$
$$E(r) = \frac{V_d}{\ln(r_o/r_i)} \frac{1}{r}$$

計算条件

- ・ 解析領域：300(mm)×300(mm)
- ・ 分割数：200×200
- ・ メッシュサイズ：1.5(mm)×1.5(mm)
- ・ 収束条件： 1.0×10^{-10}
- ・ 判定間隔：5,000（実際の間隔は 2*IOC より 10,000 回）
- ・ 最外領域電位：-5(V)

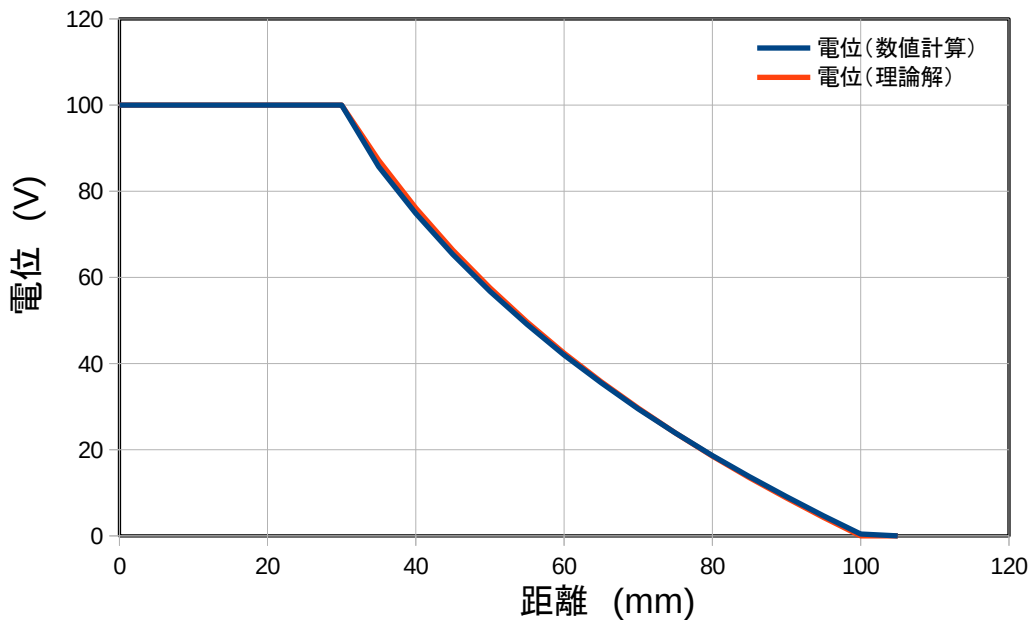


図 4. 1 円筒コンデンサの電位

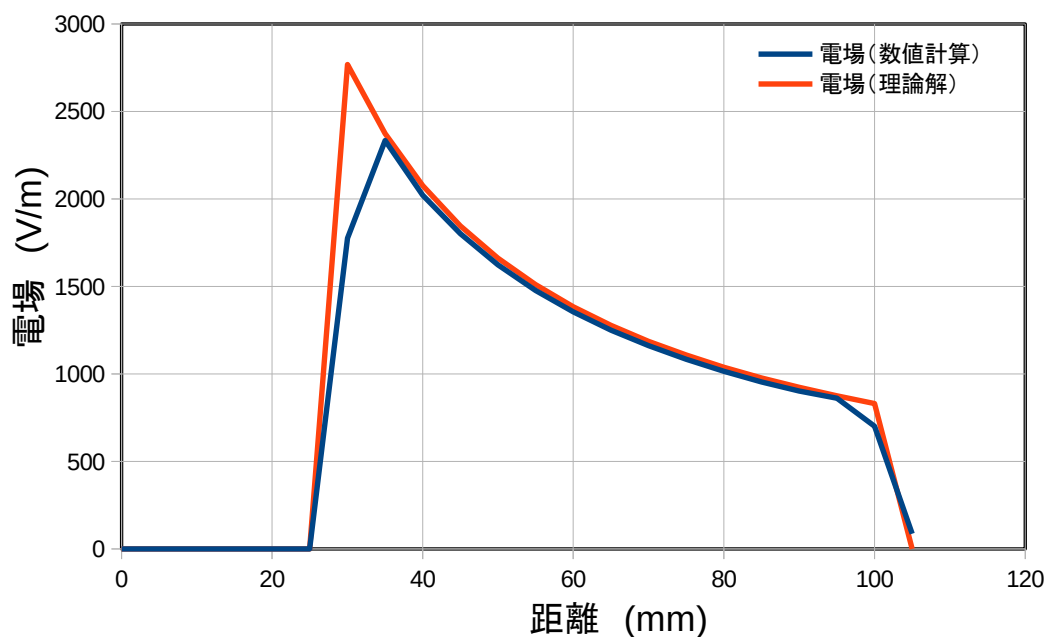


図 4. 2 円筒コンデンサの電場

表 4. 1 電流の計算結果

		境界円周の分割数				
		100	200	300	400	500
境界円半径	$4.0 \times 10^{-2}(\text{m})$	5.1159×10^2	5.1158×10^2	5.1158×10^2	5.1158×10^2	5.1158×10^2
	$6.0 \times 10^{-2}(\text{m})$	5.1160×10^2	5.1159×10^2	5.1159×10^2	5.1159×10^2	5.1159×10^2
	$8.0 \times 10^{-2}(\text{m})$	5.1158×10^2	5.1158×10^2	5.1159×10^2	5.1158×10^2	5.1158×10^2

※理論解
$$\frac{2\pi\sigma V_d}{\ln(r_o/r_i)} = \frac{200\pi}{\ln(100(\text{mm})/30(\text{mm}))} = 5.2187 \times 10^2 (\text{A})$$

以上の結果から、電位については全解析領域において一定の精度で理論値と一致する結果が得られた。しかし、電場については境界条件の設定された領域の近傍以外では理論解に近い結果が得られたが、近傍では理論解から著しく外れた結果が得られた。これは電場の計算に用いる電位の算出において、精度が不足したためと考えられる。

また、境界近傍以外で電極間に流れる電流を計算すると、境界円の半径及び分割数を多少変えただけでは計算結果に有意な差は生じず、理論値とも大方近い結果となった。

4. 2. 三相交流電線

解析領域に図 4. 3に示す様に電線形状モデルを作成し、3本の芯線に実効電圧 200(V)、周波数 50(Hz)のスター結線三相交流電圧を印加した場合の計算を行った。なお、オフセット電圧は 0(V)である。

計算条件

- 解析領域：20(mm)×20(mm)
- 分割数：200×200
- メッシュサイズ：0.1(mm)×0.1(mm)
- 収束条件： 1.0×10^{-10}
- 判定間隔：5,000（実際の間隔は2*IOCより10,000回）
- 最外領域電位：-5(V)

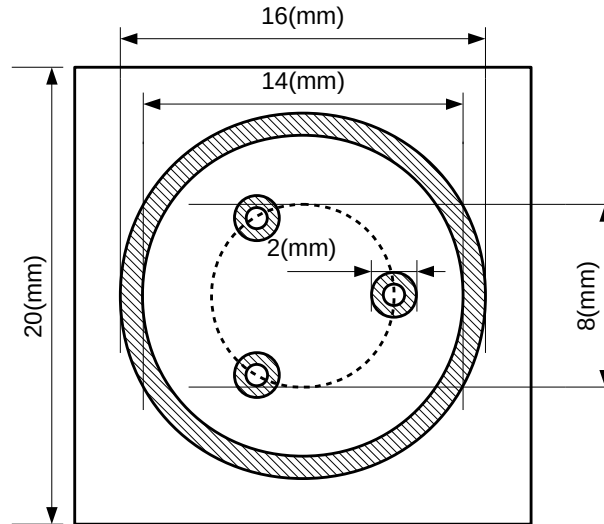


図 4. 3 三相交流電線の設定

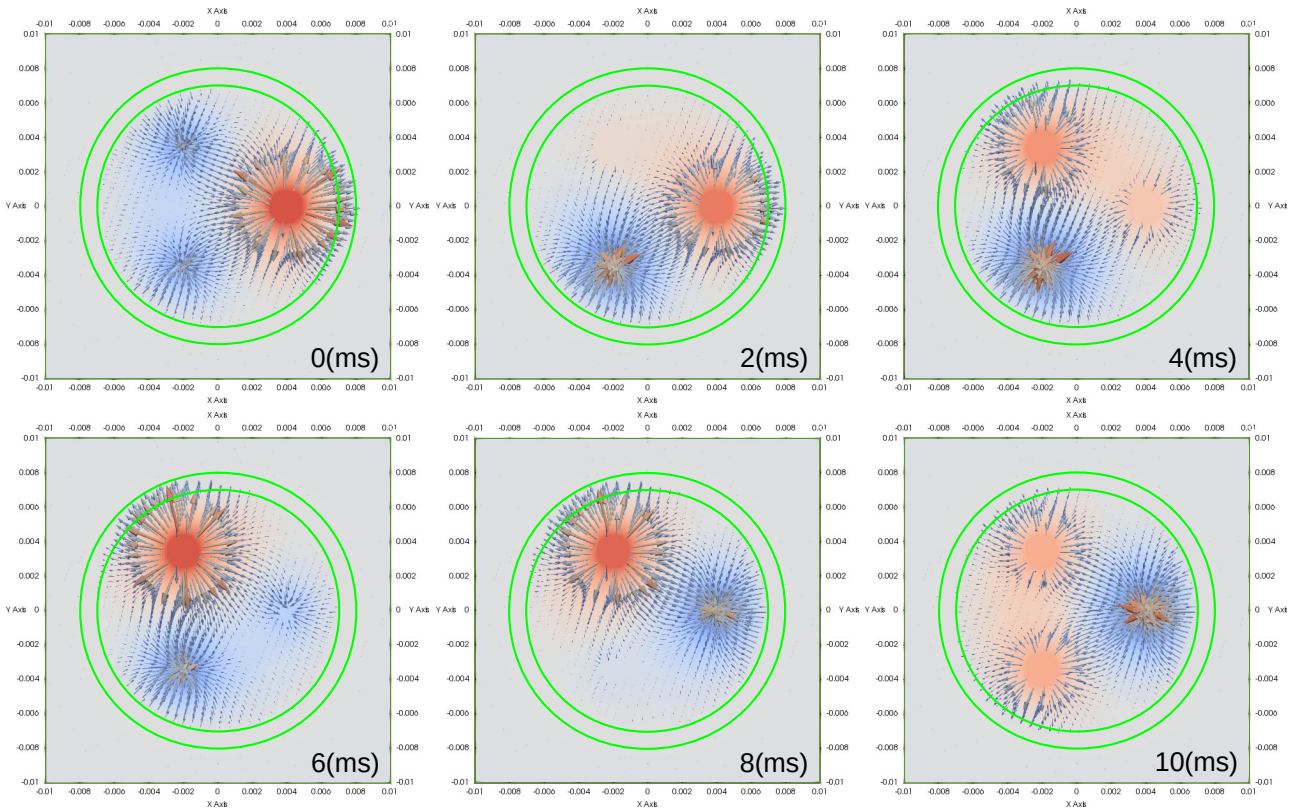


図 4. 4 電位・電場分布の変化

4. 3. 簡易実験

実際に二次元の電位分布を模擬した実験体系を用意し、適当な位置での電位を測定した。この測定結果と本プログラムによる数値解析結果との比較を行った。その結果を表4. 2に示す。

計算条件

- ・ 解析領域：200(mm)×200(mm)
- ・ 分割数：200×200
- ・ メッシュサイズ：1.0(mm)×1.0(mm)
- ・ 収束条件： 1.0×10^{-10}
- ・ 判定間隔：5,000 (実際の間隔は2*IOCより10,000回)
- ・ 最外領域電位：-5(V)
- ・ 長方形枠電位：0(V)
- ・ 円筒電極電位： 1.484×10^1 (V) ※実験に用いたACアダプタの出力電圧。
- ・ 円筒電極位置：x=22.5(mm), y=42.5(mm)

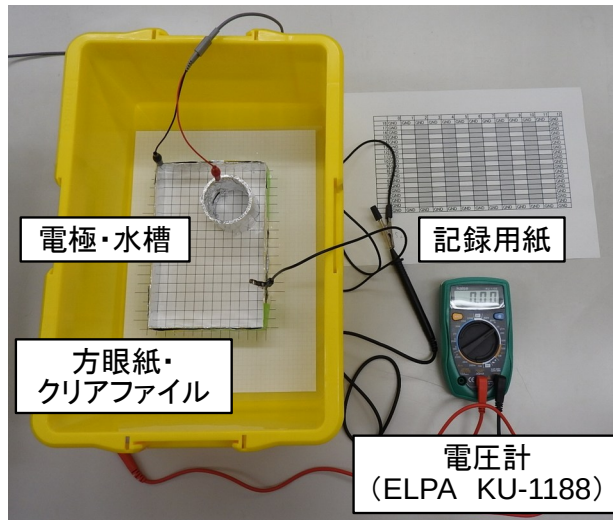


図4. 5 実験体系

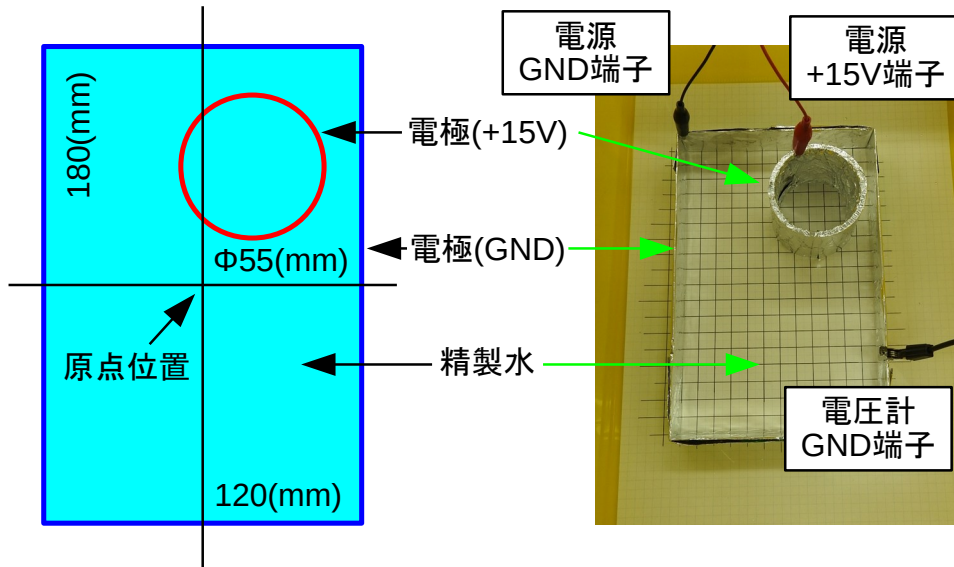


図4. 6 実験条件

表4.2 簡易実験における測定結果と数値計算結果

	-60	-50	-40	-30	-20	-10	0	10	20	30	40	50	60
90	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
80	0.00	1.28	1.80	2.28	2.91	3.72	4.66	5.29	6.19	6.04	4.78	2.92	0.00
	0.00	0.53	1.11	1.78	2.61	3.62	4.80	5.93	6.53	6.16	4.73	2.55	0.00
	0.00	141.51	62.16	28.09	11.49	2.76	2.92	10.79	5.21	1.95	1.06	14.51	0.00
70	0.00	1.67	2.65	3.78	5.02	6.92	8.96	10.63			8.16	4.82	0.00
	0.00	1.02	2.12	3.42	5.02	7.05	9.57	12.37			10.23	5.44	0.00
	0.00	63.73	25.00	10.53	0.00	1.84	6.37	14.07			20.23	11.40	0.00
60	0.00	2.00	3.35	5.00	6.77	9.49	12.55					6.74	0.00
	0.00	1.42	2.95	4.75	7.00	9.94	13.95					8.96	0.00
	0.00	40.85	13.56	5.26	3.29	4.53	10.04					24.78	0.00
50	0.00	2.20	3.81	5.76	7.96	11.02							0.00
	0.00	1.69	3.53	5.65	8.30	11.79							0.00
	0.00	30.18	7.93	1.95	4.10	6.53							0.00
40	0.00	2.32	4.08	6.06	8.51	11.51							0.00
	0.00	1.84	3.81	6.06	8.79	12.28							0.00
	0.00	26.09	7.09	0.00	3.19	6.27							0.00
30	0.00	2.35	4.04	5.96	8.24	10.67						7.33	0.00
	0.00	1.85	3.82	6.00	8.55	11.64						10.92	0.00
	0.00	27.03	5.76	0.67	3.63	8.33						32.88	0.00
20	0.00	2.23	3.85	5.51	7.21	9.33	11.42				11.02	6.12	0.00
	0.00	1.76	3.60	5.58	7.78	10.23	12.88				13.71	7.45	0.00
	0.00	26.70	6.94	1.25	7.33	8.80	11.34				19.62	17.85	0.00
10	0.00	2.08	3.44	4.86	6.29	7.81	9.22	10.36	10.91	10.03	7.74	4.45	0.00
	0.00	1.60	3.24	4.95	6.74	8.59	10.35	11.76	12.31	11.60	9.10	4.98	0.00
	0.00	30.00	6.17	1.82	6.68	9.08	10.92	11.90	11.37	13.53	14.95	10.64	0.00
0	0.00	1.91	3.04	4.22	5.36	6.47	7.40	8.01	8.12	7.34	5.63	3.27	0.00
	0.00	1.40	2.81	4.23	5.64	6.99	8.14	8.90	8.99	8.15	6.24	3.39	0.00
	0.00	36.43	8.19	0.24	4.96	7.44	9.09	10.00	9.68	9.94	9.78	3.54	0.00
-10	0.00	1.74	2.68	3.61	4.49	5.23	5.78	6.10	6.02	5.34	4.20	2.57	0.00
	0.00	1.18	2.36	3.51	4.60	5.57	6.32	6.71	6.59	5.83	4.38	2.35	0.00
	0.00	47.46	13.56	2.85	2.39	6.10	8.54	9.09	8.65	8.40	4.11	9.36	0.00
-20	0.00	1.60	2.36	3.11	3.84	4.45	4.82	4.91	4.76	4.16	3.24	2.01	0.00
	0.00	0.97	1.93	2.84	3.67	4.37	4.86	5.05	4.85	4.21	3.12	1.66	0.00
	0.00	64.95	22.28	9.51	4.63	1.83	0.82	2.77	1.86	1.19	3.85	21.08	0.00
-30	0.00	1.46	2.08	2.67	3.21	3.62	3.86	3.90	3.76	3.33	2.64	1.71	0.00
	0.00	0.78	1.53	2.24	2.87	3.37	3.69	3.77	3.57	3.06	2.24	1.19	0.00
	0.00	87.18	35.95	19.20	11.85	7.42	4.61	3.45	5.32	8.82	17.86	43.70	0.00
-40	0.00	1.30	1.79	2.21	2.62	2.89	3.08	3.09	2.98	2.66	2.13	1.46	0.00
	0.00	0.61	1.19	1.73	2.19	2.55	2.76	2.79	2.61	2.21	1.61	0.85	0.00
	0.00	113.11	50.42	27.75	19.63	13.33	11.59	10.75	14.18	20.36	32.30	71.76	0.00
-50	0.00	1.18	1.53	1.84	2.13	2.33	2.45	2.49	2.37	2.11	1.75	1.30	0.00
	0.00	0.46	0.89	1.29	1.63	1.88	2.01	2.02	1.87	1.57	1.14	0.60	0.00
	0.00	156.52	71.91	42.64	30.67	23.94	21.89	23.27	26.74	34.39	53.51	116.67	0.00
-60	0.00	1.12	1.34	1.56	1.75	1.89	1.97	1.97	1.89	1.72	1.47	1.16	0.00
	0.00	0.32	0.63	0.91	1.15	1.31	1.40	1.39	1.29	1.08	0.77	0.41	0.00
	0.00	250.00	112.70	71.43	52.17	44.27	40.71	41.73	46.51	59.26	90.91	182.93	0.00
-70	0.00	1.06	1.21	1.35	1.48	1.57	1.61	1.62	1.56	1.46	1.29	1.09	0.00
	0.00	0.21	0.41	0.58	0.73	0.83	0.88	0.88	0.80	0.67	0.48	0.25	0.00
	0.00	404.76	195.12	132.76	102.74	89.16	82.95	84.09	95.00	117.91	168.75	336.00	0.00
-80	0.00	1.02	1.13	1.21	1.28	1.31	1.37	1.37	1.33	1.26	1.16	1.03	0.00
	0.00	0.10	0.20	0.28	0.35	0.40	0.43	0.42	0.39	0.32	0.23	0.12	0.00
	0.00	920.00	465.00	332.14	265.71	227.50	218.60	226.19	241.03	293.75	404.35	758.33	0.00
-90	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

※赤色：実験値(V)、青色：計算値(V)、黒：計算値を真値とした誤差(%)

5. 考察(Discussion)

本稿で作成した二次元電位分布解析プログラムは、理論解や実験値との比較から一定の成功であると思われる。計算結果の精度については、境界条件の近傍では著しく悪化する事が分かり、本プログラムを使用する場合は、この点について十分注意する必要がある。

6. 結言(Summary)

本プログラムは今後のプログラム開発において重要な第一歩である。この経験を応用し、三次元解析や時間領域でのシミュレーションを行っていきたいと思う。

7. 文献(References)

- [1] : <https://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%B7%AE%E5%88%86%E6%B3%95>
- [2] : 差分法の基礎 (<http://center.stelab.nagoya-u.ac.jp/summer-school/pdf/text1-1.pdf>)
- [3] : 物理入門コース3 電磁気学 I 電場と磁場 長岡洋介著 岩波書店
- [4] : 基礎からの交流理論 小郷 寛 原著 小亀 英己 石亀 篤司 共著 電気学会

8. 著者(Author)

氏名：志多 友史 (工学修士)

略歴：

2011年：下位国立大学 工学部電気系学科卒業

2013年：同大学大学院 工学研究科修了

2013年：研究開発機関へ就職

興味：物理・数学・コンピュータ・電気電子工作

9. 備考(Notes)

特になし。