1.(1) 関数 $f(x)$ の微分は次のようになる。

$$f'(x) = 2e^x + 2xe^x = 2e^x(x+1)$$

従って、点 $(2, f(2))$ における接線 l の式は次のように表される。

$$y - f(2) = 2e^2(2+1)\cdot(x-2)$$

これを整理すると以下に示すように接線 l の式が求められる。

$$\underline{y = 6e^2x - 8e^2} \;/\!/$$

1.(2) 部分積分を用いて、不定積分を求める。

$$\int(2xe^x)dx = 2\int x(e^x)'dx = 2[xe^x] - 2\int(x)'e^x dx$$

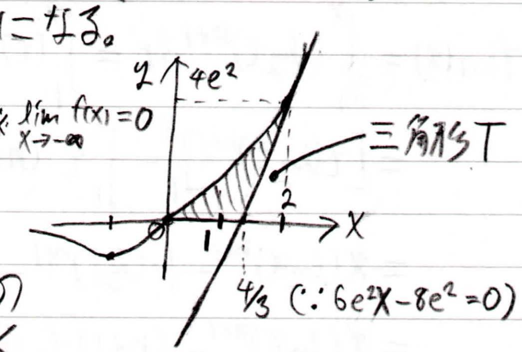
$$= 2xe^x - 2\int e^x dx = 2xe^x - 2e^x + C \quad ※C:積分定数$$

以上から求める不定積分は次のようになる。

$$\underline{\int f(x)dx = 2e^x(x-1) + C \quad ※C:積分定数} \;/\!/$$

1.(3) 関数の概形を調べ、積分範囲を特定した後、面積 S を求める。
増減表と関数の概形は以下のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{2}{e}$	↗	0	↗	$4e^2$	↗



これらより求める面積 S は、関数 $f(x)$ の定積分から三角形 T の面積を差し引く事により求められ、具体的な計算は以下のようになる。

$$S = \int_0^2(2xe^x)dx - \frac{1}{2}\left(2-\frac{4}{3}\right)\cdot 4e^2 = 2e^2(2-1) - 2e^0(0-1) - \frac{4}{3}e^2$$

$$= \frac{2}{3}e^2 + 2$$

以上から求める面積 S は次のようになる。

$$\underline{S = \frac{2}{3}e^2 + 2} \;/\!/$$

No. 藤柴理系

Date

2.(1) 不定積分 $\int \log x\, dx$ 及び $\int (\log x)/x\, dx$ を求める。

(i) 部分積分を用いて $\int \log x\, dx$ を求める。

$$\int \log x\, dx = \int (x)' \log x\, dx = \left[x \log x\right] - \int x (\log x)'\, dx$$

$$= x\log x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx = x \log x - \int dx = x\log x - x + C$$ ※C:積分定数

$$\therefore \int \log x\, dx = x\log x - x + C$$ ※C:積分定数 //

(ii) 置換積分を用いて $\int (\log x)/x\, dx$ を求める。

$t = \log x$ とおくと $dt = 1/x\, dx$ となるので

$$\int \frac{\log x}{x}\, dx = \int (\log x) \cdot \frac{1}{x}\, dx = \int t \cdot dt = \frac{1}{2}t^2 + C$$ ※C:積分定数

$$= \frac{1}{2}(\log x)^2 + C$$

$$\therefore \int \frac{\log x}{x}\, dx = \frac{1}{2}(\log x)^2 + C$$ ※C:積分定数 //

2.(2) 与式より $f_{n+1}(x)$ について計算を行う。

$$f_{n+1}(x) = \int_1^x (\log t)^{n+1}\, dt = \int_1^x (t)'(\log t)^{n+1}\, dt$$

$$= \left[t(\log t)^{n+1}\right]_1^x - \int_1^x t \cdot (n+1)(\log t)'(\log t)^n\, dt$$ ※部分積分

$$= x(\log x)^{n+1} - 1 \cdot (\log 1)^{n+1} - (n+1)\int_1^x t \cdot \frac{1}{t}(\log t)^n\, dt$$

$$= x(\log x)^{n+1} - (n+1) f_n(x)$$

$$\therefore f_{n+1}(x) = x(\log x)^{n+1} - (n+1) f_n(x)$$ //

No. 藤巣理乎

Date

2.(3) 与式より $g_{n+1}(x)$ について計算を行う。

$s=\log t$ とおいて置換を行うと $ds=1/t\,dt$、$\begin{array}{c|c} t & 1 \to x \\ \hline s & 0 \to \log x \end{array}$ となるので

$$g_{n+1}(x)=\int_1^x \frac{(\log t)^{n+1}}{t}dt=\int_0^{\log x} s^{n+1}ds=\left[\frac{1}{n+2}s^{n+2}\right]_0^{\log x}$$

$$=\frac{1}{n+2}(\log x)^{n+2}-\frac{1}{n+2}\cdot 0=\frac{(\log x)^{n+2}}{n+2} \quad \text{—①}$$

①式の n に $n-1$ を代入し、$g_n(x)$ を求めると次のようになる。

$$g_n(x)=\frac{(\log x)^{n+1}}{n+1} \quad \text{—②}$$

以上の①、②式を用いて $g_{n+1}(x)$ について式を整理すると以下のようになる。

$$g_{n+1}(x)=\frac{(\log x)^{n+2}}{n+2}=\frac{\log x}{n+2}\cdot\frac{n+1}{n+1}\cdot(\log x)^{n+1}=\frac{(n+1)\log x}{n+2}\cdot\frac{(\log x)^{n+1}}{n+1}$$

$$=\frac{(n+1)\log x}{n+2}\cdot g_n(x)$$

よって $g_{n+1}(x)$ は次のように表される。

$$\underline{g_{n+1}(x)=\frac{n+1}{n+2}(\log x)\,g_n(x)} \quad //$$

3.(1) 数学的帰納法を用いて命題「全ての自然数nに対して$\left(\frac{3}{2}\right)^n \geqq 1+\frac{n}{2}$」が成立する事を示す。

(i) $n=1$の場合において命題が成立する事を示す。

$$\left(\frac{3}{2}\right)^1=\frac{3}{2} \quad ① \qquad 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \quad ②$$

①,②式より等号が成り立ち、$n=1$において命題が成立する事が示された。

(ii) $n=k$ (kは自然数)の場合において命題が成立すると仮定する。

$$\left(\frac{3}{2}\right)^k \geqq 1+\frac{k}{2} \quad ③$$

$n=k+1$の場合における命題の真偽を確かめる。

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1}=\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^k \geqq \frac{3}{2}\left(1+\frac{k}{2}\right)$$ ※③式を適用

$$\frac{3}{2}\left(1+\frac{k}{2}\right)=\frac{3}{2}+\frac{3k}{4}=1+\frac{1}{2}+\frac{k}{2}+\frac{k}{4}=\left(1+\frac{k+1}{2}\right)+\frac{k}{4}>\left(1+\frac{k+1}{2}\right)$$

以上の式を整理すると次のようになる。

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1} \geqq \left(1+\frac{k+1}{2}\right)+\frac{k}{4}>\left(1+\frac{k+1}{2}\right)$$

従って、$n=k+1$の場合にも命題が成立する事が示された。

以上(i)(ii)より命題「全ての自然数nに対して$\left(\frac{3}{2}\right)^n \geqq 1+\frac{n}{2}$」は真である事が示された。なお、等号成立は$n=1$の場合である。

3.(2) (1)で示された命題について両辺の逆数をとると次の不等式が成り立つ。

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n \leqq \frac{2}{n+2} \quad ④$$

④式とはさみうち法より求める極限について以下の式が成立する。

$$0 \leqq \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n \leqq \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\frac{2}{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n}+\frac{2}{\sqrt{n}}}=0$$

よって求める極限は次のようになる。

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0 \quad //$$

No. 藤学理系

Date

4.(1) 方程式の解を $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおくとド・モアブルの定理より次のように式を書き換える事ができる。

$$z^3=r^3(\cos\theta+i\sin\theta)^3=r^3(\cos3\theta+i\sin3\theta)$$

また $8i=2^3(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$ であるから r と θ について以下の式が成り立つ。

$r=2$、$3\theta=\pi/2+2n\pi$　※ n は整数

θ について、$0\leqq\theta<2\pi$ を満たすように n を選ぶと $n=0,1,2$ となるので θ の候補は次のようになる。

$$3\theta=\pi/2,\ \pi/2+2\pi,\ \pi/2+4\pi=\pi/2,\ 5\pi/2,\ 9\pi/2$$

$$\theta=\pi/6,\ 5\pi/6,\ 3\pi/2$$

従って、題意より α,β,γ は以下のようになる。

$\alpha=2(\cos\pi/6+i\sin\pi/6)=2(\sqrt{3}/2+1/2\,i)=\sqrt{3}+i$　… $\underline{\alpha=\sqrt{3}+i}$ //

$\beta=2(\cos5\pi/6+i\sin5\pi/6)=2(-\sqrt{3}/2+1/2\,i)=-\sqrt{3}+i$　… $\underline{\beta=-\sqrt{3}+i}$ //

$\gamma=2(\cos3\pi/2+i\sin3\pi/2)=2(0+(-1)i)=-2i$　… $\underline{\gamma=-2i}$ //

4.(2) それぞれ計算を行う。

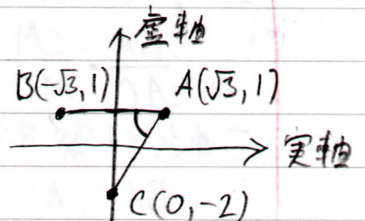
(i) $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\dfrac{(-2i)-(\sqrt{3}+i)}{(-\sqrt{3}+i)-(\sqrt{3}+i)}=\dfrac{-\sqrt{3}-3i}{-2\sqrt{3}}=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$

(ii) $\left|\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=\left|\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right|=\dfrac{1}{2}\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{4}=1$

以上から以下の結果が得られる。

$$\underline{\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{1+\sqrt{3}i}{2},\quad \left|\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=1}\ //$$

4.(3) (2)の(i)より次の式が成り立ち、偏角∠BACが $\pi/3$[rad] (=60[°]) となる事が分かる。



$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$$

また(2)の(ii)より以下の式が成立し、AB=ACとなる事が分かる。

$$\left|\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=1\ \cdots\ |\gamma-\alpha|=|\beta-\alpha|\ \cdots\ AB=AC$$

以上から、二辺の長さが等しく、その間の角度が $\pi/3$[rad] (=60[°]) となるので、△ABCは正三角形となる。

5.(1) 内積の定義と余弦定理より以下の式が成立する。

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\angle AOB=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\frac{|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2}{2|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}$$
$$=\frac{1}{2}\left(2^2+(\sqrt{2})^2-2^2\right)=1$$

以上から求める内積は次のようになる。

$$\underline{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1}\ //$$

5.(2) 分点の式を用いるとベクトル $\overrightarrow{OC}$ は次のように表される。

$$\overrightarrow{OC}=\frac{t\overrightarrow{OA}+(1-t)\overrightarrow{OB}}{(1-t)+t}=t\overrightarrow{OA}+(1-t)\overrightarrow{OB}$$

これを用いて $|\overrightarrow{OC}|^2+|\overrightarrow{OD}|^2$ の計算を行うと以下のようになる。

$$|\overrightarrow{OC}|^2+|\overrightarrow{OD}|^2=\left\{t\overrightarrow{OA}+(1-t)\overrightarrow{OB}\right\}^2+\left(t\overrightarrow{OB}\right)^2$$
$$=t^2|\overrightarrow{OA}|^2+2t(1-t)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+(1-t)^2|\overrightarrow{OB}|^2+t^2|\overrightarrow{OB}|^2$$
$$=4t^2+(2t-2t^2)+(2-4t+2t^2)+2t^2$$
$$=6t^2-2t+2=6(t-1/6)^2+11/6$$

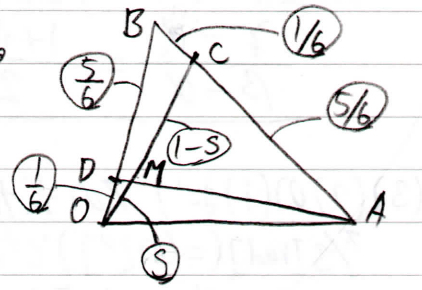
以上から $|\overrightarrow{OC}|^2+|\overrightarrow{OD}|^2$ はtの二次関数で表され、$t=1/6$ のとき最小値 $11/6$ となる事が分かる。これより求める解は次のようになる。

$$\underline{t_0=1/6\ 、最小値:11/6}\ //$$

5.(3) 変数 $S\ (0<S<1)$ をおき、$OM:MC=S:(1-S)$ とする。

添

題意の図形の辺の比にメネラウスの定理を適用すると次の式が成り立つ。



$$\frac{BA}{AC}\cdot\frac{CM}{MO}\cdot\frac{OD}{DB}=1\quad —①$$

これを計算すると以下のようになる。

$$\frac{BA}{AC}\cdot\frac{CM}{MO}\cdot\frac{OD}{DB}=\frac{(1/6+5/6)}{5/6}\cdot\frac{1-S}{S}\cdot\frac{1/6}{5/6}=\frac{6}{5}\cdot\frac{1-S}{S}\cdot\frac{1}{5}=\frac{6}{25}\cdot\frac{1-S}{S}\quad —②$$

①,②式より $S=6/31$ となる。この値と $t=t_0=1/6$ 及び(2)の内容を用いると $|\overrightarrow{OM}|^2$ は次のように計算する事ができる。

$$|\overrightarrow{OM}|^2=(6/31)^2|\overrightarrow{OC}|^2=(6/31)^2(11/6-|\overrightarrow{OD}|^2)=(6/31)^2(11/6-|\overrightarrow{OB}|^2/6^2)$$
$$=(6/31)^2(11/6-2/36)=(6/31)^2(16/9)=(6/31)^2(4/3)^2=(8/31)^2$$

以上から $|\overrightarrow{OM}|$ は次のようになる。

$$\underline{|\overrightarrow{OM}|=8/31}\ //$$

5. (3) 変数 s, r $(0<s, r<1)$ をおき、$OM:MC=s:(1-s)$、$AM:MD=r:(1-r)$ とする。
s, r を用いると $\overrightarrow{OM}$ は以下のように表す事ができる。

$$\overrightarrow{OM}=(1-r)\overrightarrow{OA}+r\overrightarrow{OD}=(1-r)\overrightarrow{OA}+\frac{1}{6}r\overrightarrow{OB} \quad ③$$

$$\overrightarrow{OM}=s\overrightarrow{OC}=s\left(\frac{1}{6}\overrightarrow{OA}+\frac{5}{6}\overrightarrow{OB}\right)=\frac{1}{6}s\overrightarrow{OA}+\frac{5}{6}s\overrightarrow{OB} \quad ④$$

③, ④式より以下の式が成り立つ。

$$1-r=\frac{1}{6}s, \quad \frac{1}{6}r=\frac{5}{6}s$$

これを解くと、$s=6/31$、$t=30/31$ となる。
従って、$|\overrightarrow{OM}|$ は、$s=6/31$、$t=t_0=1/6$ 及び(2)の内容を用いると次のように計算する事ができる。

$$|\overrightarrow{OM}|=\frac{6}{31}|\overrightarrow{OC}|=\frac{6}{31}\sqrt{\frac{11}{6}-|\overrightarrow{OD}|^2}=\frac{6}{31}\sqrt{\frac{11}{6}-\frac{|\overrightarrow{OB}|^2}{6^2}}$$

$$=\frac{6}{31}\sqrt{\frac{66-2}{36}}=\frac{6}{31}\cdot\frac{8}{6}=\frac{8}{31}$$

以上から $|\overrightarrow{OM}|$ は次のようになる。

$$|\overrightarrow{OM}|=\frac{8}{31}$$