No. 薩学理系

Date

1.(1) 与式を微分すると次のようになる。

$$\frac{d}{dx}\log(x+\cos x)=\frac{(x+\cos x)'}{x+\cos x}=\frac{1-\sin x}{x+\cos x} \qquad \therefore y'=\frac{1-\sin x}{x+\cos x}$$

1.(2) 題意より以下の式が成立する。

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=40 \quad —① \qquad \sigma=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-40)^2}=20 \quad —②$$

ax_i+bについて平均値と標準偏差を求めると以下のようになる。

$$\bar{x}'=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b)=\frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i+\frac{b}{n}\cdot n=a\bar{x}+b=40a+b\cdots=80 \quad —③$$

$$\sigma'=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-\bar{x}')^2}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-40a-b)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a^2(x_i-40)^2}=a\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-40)^2}=20a\cdots=10 \quad —④$$

③,④式より(a,b)は次のようになる。

$$(a,b)=(1/2,\ 60)$$

1.(3) 全てのカードに番号付けを行い、全ての組み合わせについての確率を計算する。なお、表裏がA/Bとなっているカードに1~3、表裏がA/Aとなっているカードに4,5の番号を付ける。

カードの組合せ	A + A	A + B	B + B
(1,2)	1/4	2/4	1/4
(1,3)	1/4	2/4	1/4
(1,4)	2/4	2/4	0/4
(1,5)	2/4	2/4	0/4
(2,3)	1/4	2/4	1/4
(2,4)	2/4	2/4	0/4
(2,5)	2/4	2/4	0/4
(3,4)	2/4	2/4	0/4
(3,5)	2/4	2/4	0/4
(4,5)	4/4	0/4	0/4

※1. カードの組合せ総数は $_5C_2=10$ より 10パターン。

※2. カードの表裏の組合せは $2\times2=4$ より 4パターン。

以上から2枚のカードがともにAとなる確率は次式より求められる。

$$(1/4+1/4+2/4+2/4+1/4+2/4+2/4+2/4+2/4+4/4)\times 1/10$$

従って求める確率は次のようになる。

$$19/40$$

No. 藤崎拓実

Date

1.(4) 部分積分を用いて値を求める。

$$\int_{-1}^{1} x\sqrt{x+1}\,dx = \int_{-1}^{1} x\left\{\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\right\}' dx = \left[\frac{2}{3}x(x+1)^{3/2}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}dx$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{2}{3}\left[\frac{2}{5}(x+1)^{5/2}\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{16}{15}\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{15}$$

以上から求める値は次のようになる。

$$\int_{-1}^{1} x\sqrt{x+1}\,dx = \frac{4\sqrt{2}}{15}$$ //

1.(5) 1000以上2023以下の範囲において3で割れる自然数の集合をA、4で割れる自然数の集合をB、3と4の最小公倍数である12で割れる自然数の集合をCとおく。また、それぞれの要素数をn(X)と表すと以下のようになる。

$A = \{3\cdot334(=1002), \cdots, 3\cdot674(=2022)\}$、$n(A) = 674-334+1 = 341$

$B = \{4\cdot250(=1000), \cdots, 4\cdot505(=2020)\}$、$n(B) = 505-250+1 = 256$

$C = \{12\cdot84(=1008), \cdots, 12\cdot168(=2016)\}$、$n(C) = 168-84+1 = 85$

以上から求める要素数は $n(A)+n(B)-n(C)$ より次のようになる。

512 //

1.(6) 和の公式を用いて与式を変形する。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{2n}k^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\cdot\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\cdot\frac{16n^3+12n^2+2n}{6}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n^3(16+12/n+2/n^2)}{6} = \frac{1}{6}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(16+\frac{12}{n}+\frac{2}{n^2}\right) = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$

以上から次の結果が得られる。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{2n}k^2 = \frac{8}{3}$$ //

1.(7) 値が求められるものについて比較すると以下のようになる。

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}},\quad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2\sqrt{3}},\quad \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{2\sqrt{3}},$$

$$\sin\frac{\pi}{6} < \tan\frac{\pi}{6} < \cos\frac{\pi}{6}$$

$\pi/6 < 1$ なので $\log_2 \pi/6 < 0$ であるから大小関係は次のようになる。

$$\log_2\frac{\pi}{6} < \sin\frac{\pi}{6} < \tan\frac{\pi}{6} < \cos\frac{\pi}{6}$$ //

No. 藤堂理季

Date

1.(8) 与式を変形すると以下のようになる。

$$2\log_2(x-2) \leqq 1 + \log_2(x-1) \Rightarrow \log_2(x-2)^2 \leqq \log_2 2 + \log_2(x-1)$$

$$\Rightarrow \log_2(x-2)^2 \leqq \log_2 2(x-1) \Rightarrow (x-2)^2 \leqq 2(x-1)$$

$$\Rightarrow x^2-6x+6 = (x-3)^2-3 \leqq 0 \Rightarrow -\sqrt{3} \leqq x-3 \leqq \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 3-\sqrt{3} \leqq x \leqq 3+\sqrt{3}$$

ここで真数条件より、$x-2>0$ かつ $x-1>0$ でなければならないので、$x>2$ となり、求める x の範囲は次のようになる。

$$\underline{2 < x \leqq 3+\sqrt{3}} \quad //$$

1.(9) 与式を変形すると以下のようになる。

$$\frac{(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)^4}{\cos 3\theta + i\sin 3\theta} = \frac{\{(\cos\theta + i\sin\theta)^2\}^4}{(\cos\theta + i\sin\theta)^3} = \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^8}{(\cos\theta + i\sin\theta)^3}$$

$$= (\cos\theta + i\sin\theta)^5 = \cos 5\theta + i\sin 5\theta$$

$\theta = \pi/15$ を代入すると次のようになる。

$$\cos 5\pi/15 + i\sin 5\pi/15 = \cos \pi/3 + i\sin \pi/3 = 1/2 + \sqrt{3}/2\, i$$

以上から次の結果が求められる。

$$\left[\frac{(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)^4}{\cos 3\theta + i\sin 3\theta}\right]_{\theta=\pi/15} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \quad //$$

1.(10) 与えられている不等式を解くと以下のようになる。

$$x^2+2x-8 \leqq 0 \cdots (x-2)(x+4) \leqq 0 \cdots -4 \leqq x \leqq 2 \quad — ①$$

$$x^2-7x+12 \geqq 0 \cdots (x-4)(x-3) \geqq 0 \cdots x \leqq 3 \text{ または } x \geqq 4 \quad — ②$$

①が成立していれば、$x \leqq 3$ であるため②は成立する。

②が成立していても、①が成立するとは限らない。(反例：$x=10$)

従って、①は②であるための十分条件であるが必要条件ではない。

よって選択肢は(あ)となる。

2.(1) 関数 $f(x)$ の微分は次のようになる。

$$f'(x) = -4x^3 + 4x = -4x(x^2-1) = -4x(x-1)(x+1) \quad \text{—①}$$

①式より、$x=-1, 0, 1$ のとき $f'(x)=0$ となり極値の x 座標が求められる。
増減表を書くと以下のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	0	↘	-1	↗	0	↘

また、増減表から極大値、極小値は次のように求められる。

極大値：$x=-1$ 及び 1 のとき、0
極小値：$x=0$ のとき -1 //

2.(2) 関数 $f(x)$ の二階微分は①式を用いて次のようになる。

$$f''(x) = (-4x^3+4x)' = -12x^2+4 = -12(x^2 - 1/3) = -12(x - 1/\sqrt{3})(x + 1/\sqrt{3}) \quad \text{—②}$$

②式より、$x = -1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3}$ のとき $f''(x)=0$ となり変曲点の x 座標が求められる。これより各点における接線の方程式を求める。

(i) $x = -1/\sqrt{3}$ における接線の方程式は次のようになる。

$$y - f(-1/\sqrt{3}) = f'(-1/\sqrt{3})(x - (-1/\sqrt{3}))$$
$$y - (-4/9) = -8\sqrt{3}/9\,(x + 1/\sqrt{3})$$
$$y = -(8\sqrt{3}/9)x - 4/3$$

(ii) $x = 1/\sqrt{3}$ における接線の方程式は次のようになる。

$$y - f(1/\sqrt{3}) = f'(1/\sqrt{3})(x - 1/\sqrt{3})$$
$$y - (-4/9) = 8\sqrt{3}/9\,(x - 1/\sqrt{3})$$
$$y = (8\sqrt{3}/9)x - 4/3$$

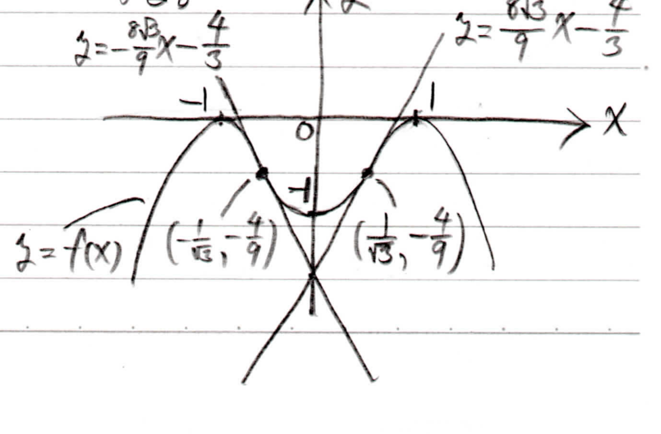
以上から変曲点とその点における接線の方程式は以下のようになる。

$$\left(-1/\sqrt{3}, -4/9\right) \cdots y = -\frac{8\sqrt{3}}{9}x - \frac{4}{3}$$
$$\left(1/\sqrt{3}, -4/9\right) \cdots y = \frac{8\sqrt{3}}{9}x - \frac{4}{3}$$
//

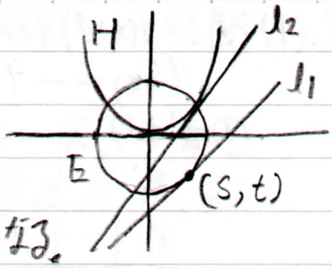
2.(3) グラフが下に凸の範囲では $f''(x) \geqq 0$ となるので②式より求める x の範囲は次のようになる。

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} \leqq x \leqq \frac{1}{\sqrt{3}}$$
//

2.(4) 題意の作図を行うと次のようになる。



3.(1) 題意の図を作図すると右のようになる。



接線l_1, l_2の方程式を求めると以下のようになる。

(i) 円($x^2+y^2=r^2$)の(x_0, y_0)における接線の方程式は

$$x_0x+y_0y=r^2$$

という形で表される。従って接線l_1の方程式は次のようになる。

$$sx+ty=1 \cdots y=-\frac{s}{t}x+\frac{1}{t}$$

(ii) 放物線$y=kx^2$の微分は$y'=2kx$となるので、接線l_2の方程式は次のようになる。

$$y-ku^2=2ku(x-u) \cdots y=2kux-ku^2$$

以上から求める接線の方程式は以下のようになる。

$$l_1: y=-\frac{s}{t}x+\frac{1}{t},\quad l_2: y=2kux-ku^2 \quad //$$

3.(2) 点(s, t)は円周($x^2+y^2=1$)上の点なので次式が成り立つ。

$$s^2+t^2=1 \cdots t^2=1-s^2$$

また、$t<0$なので、tはsを用いて次のように表す事ができる。

$$t=-\sqrt{1-s^2} \quad //$$

3.(3) (2)の解を用いて、接線l_1, l_2の方程式を書き換えると次のようになる。

$$l_1: y=\frac{s}{\sqrt{1-s^2}}x-\frac{1}{\sqrt{1-s^2}} \qquad l_2: y=2kux-ku^2$$

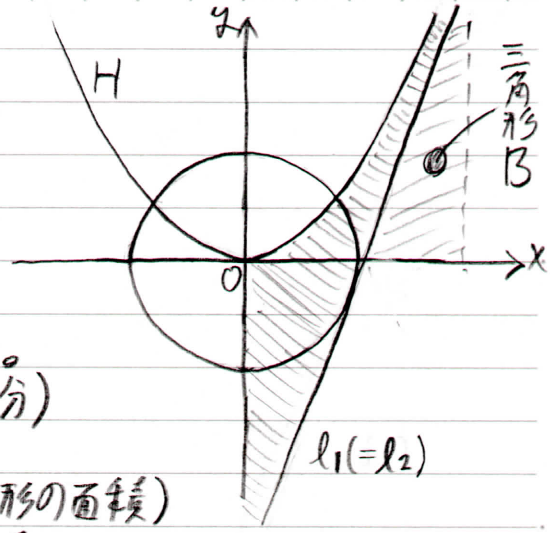
両式の係数を比較すると次のようになる。

$$\frac{s}{\sqrt{1-s^2}}=2ku,\quad -\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}=-ku^2$$

この2式より、uとkをsを用いて表すと次のようになる。

$$u=\frac{2}{s},\quad k=\frac{s^2}{4\sqrt{1-s^2}} \quad //$$

3.(4) 接線 $l_1(=l_2)$ の放物線Hとの接点、
　x,y軸との交点は以下のようになる。
　　放物線Hとの接点 $\left(\frac{2}{s},\ \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\right)$
　　x軸との交点 $\left(\frac{1}{s},\ 0\right)$
　　y軸との交点 $\left(0,\ -\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\right)$
　また、題意の図を作図すると右のようになり、
　求める面積Aは以下のように表す事ができる。



　　A＝(放物線Hの $x=0$ から $x=\frac{2}{s}$ までの定積分)
　　　　−(三角形Bの面積)
　　　　＋(接線 l_1 と x,y軸により作られる三角形の面積)
　上記の内容を数式で表すと以下のようになる。

$$A=\int_0^{2/s}\frac{s^2}{4\sqrt{1-s^2}}x^2dx-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{s}-\frac{1}{s}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}\cdot\left|-\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\right|$$
$$=\frac{s^2}{4\sqrt{1-s^2}}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{2/s}-\frac{1}{2s\sqrt{1-s^2}}+\frac{1}{2s\sqrt{1-s^2}}$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{s^3}\cdot\frac{s^2}{4\sqrt{1-s^2}}=\frac{2}{3s\sqrt{1-s^2}}$$

　従って求める面積Aは次のようになる。

$$A=\frac{2}{3s\sqrt{1-s^2}}\quad//$$

3.(5) (4)の解をsで微分すると次のようになる。

$$\frac{dA}{ds}=\frac{d}{ds}\left\{\frac{2}{3s\sqrt{1-s^2}}\right\}=\frac{2}{3}\cdot\frac{-\left\{\sqrt{1-s^2}+s\cdot\frac{1}{2}(-2s)(1-s^2)^{-1/2}\right\}}{(s\sqrt{1-s^2})^2}$$
$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{s^2(1-s^2)^{-1/2}-\sqrt{1-s^2}}{s^2(1-s^2)}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2s^2-1}{s^2(1-s^2)^{3/2}}$$

　変数sは円周($x^2+y^2=1$)上の点のx座標で第四象限(x,y軸含まない)に
　存在する事から、変数sの範囲は $0<s<1$ となる。
　また、$\lim_{s\to 0}A=\infty$、$\lim_{s\to 1}A=\infty$ であるから、$dA/ds=0$ となる変数sが
　面積Aを最小にする変数sの候補となる。
　以上より $0<s<1$ の範囲において $dA/ds=0$ となるsを求めると以下のようになる。

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{2s^2-1}{s^2(1-s^2)^{3/2}}=0\ \cdots\ 2s^2-1=0\ \cdots\ s=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

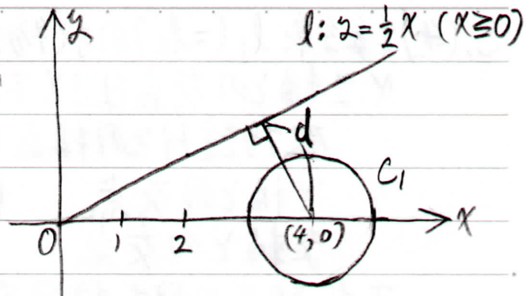
　従って求める解は次のようになる。

$$s=1/\sqrt{2}\text{、}A=4/3\quad//$$

No. 藤牟据丞

Date

4.(1) 題意の状況を図示すると右のようになる。
これより、円C_1の中心$(4,0)$と直線lの距離dが
$d \leqq 2$となれば、ストーンS_1, S_2は衝突する。
この場合、点と直線との距離の公式から
dは次のように求められる。



$$d=\frac{|\frac{1}{2}\cdot 4-1\cdot 0|}{\sqrt{(\frac{1}{2})^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{\frac{5}{4}}}=\frac{4}{\sqrt{5}}<2$$

$(\because 16<20 \cdots \sqrt{16}=4<\sqrt{20}=2\sqrt{5})$

以上よりS_2はS_1に当たる。

4.(2) 点と直線との距離の公式より、求める距離は次のように求められる。

$$\frac{|a\cdot 4-1\cdot 0+b|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=\frac{4a+b}{\sqrt{a^2+1}}$$

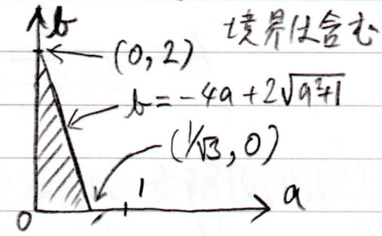
よって、求める距離は次のようになる。

$$\frac{4a+b}{\sqrt{a^2+1}} \quad //$$

4.(3) ストーンの半径は1なので、2つのストーンが接する時の中心間の距離は
2となる。従って(2)の解が次の条件を満たせばストーンは衝突する。

$$\frac{4a+b}{\sqrt{a^2+1}} \leqq 2 \quad \cdots \quad b \leqq -4a+2\sqrt{a^2+1}$$

ストーンが衝突する条件を満たす点(a,b)の領域を
図示すると右のようになる。



No. 藤崇拉奎

4.(4) (3)で求めた領域の面積Mは次のように表される。

$$M=\int_{a=0}^{a=1/\sqrt{3}}\left(-4a+2\sqrt{a^2+1}\right)da=-4\left[\frac{1}{2}a^2\right]_{a=0}^{a=1/\sqrt{3}}+2\int_{a=0}^{a=1/\sqrt{3}}\sqrt{a^2+1}\,da$$

ここで$\sqrt{a^2+1}$の不定積分については途中式が与えられているが
$1/\cos\theta$の不定積分が定まっていないので、これを求める。

$$\int\frac{d\theta}{\cos\theta}=\int\frac{\cos\theta\,d\theta}{\cos^2\theta}=\int\frac{\cos\theta\,d\theta}{1-\sin^2\theta}$$

$t=\sin\theta$として置換積分を行うと$dt=\cos\theta\,d\theta$となり式変形を行うと
以下のようになる。

$$\int\frac{\cos\theta\,d\theta}{1-\sin^2\theta}=\int\frac{dt}{1-t^2}=\int\frac{dt}{(1-t)(1+t)}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\log_2|1-t|+\log_2|1+t|\right)+C \qquad ※C:積分定数$$

$$=\frac{1}{2}\log_2\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=\frac{1}{2}\log_2\left|\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right|+C$$

従って面積Mの計算は以下のようになる。

$$M=-\frac{2}{3}+2\left[\frac{\tan\theta}{2\cos\theta}+\frac{1}{4}\log_2\left|\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right|\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/6} \qquad \left(\because\ \frac{1}{\sqrt{3}}=\tan\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=-\frac{2}{3}+2\left\{\left(\frac{1/\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{3}/2}+\frac{1}{4}\log_2\left|\frac{1+1/2}{1-1/2}\right|\right)-\left(\frac{0}{2\cdot 1}+\frac{1}{4}\log_2\left|\frac{1+0}{1-0}\right|\right)\right\}$$

$$=-\frac{2}{3}+2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\log_2\frac{3/2}{1/2}\right)=\frac{1}{2}\log_2 3$$

以上から面積Mの値は次のようになる。

$$M=\frac{1}{2}\log_2 3$$