No. 藤生理系
Date

1.(1) $x=\tan\theta$ と置換すると $dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$、$x:0\to1$、$\theta:0\to\pi/4$ となるので

$$\int_{x=0}^{x=1}\frac{1}{1+x^2}dx=\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/4}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\pi/4}\frac{d\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\int_0^{\pi/4}d\theta$$

$$=[\theta]_0^{\pi/4}=\pi/4$$

$$\therefore\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}$$

1.(2) 整数A35B3のA、Bに関する制約条件は以下の通り。

$1\leqq A\leqq 9$、$0\leqq B\leqq 9$

A=0の場合、5桁の整数にはならない。

始めに、A=1と固定して問題を考える。

「135B3が9の倍数となる最小のBは何か。」

次に13500=9×1500より次式が成立する。

135B3 = 9×1500 + B3

135B3が9の倍数であるためには、B3が9の倍数である必要がある。

03…×、13…×、23…×、…63=9×7…○、→ B=6

∴ A=1、B=6

※各位の数の和が9の倍数であれば、
その数は9の倍数である。(豆知識)

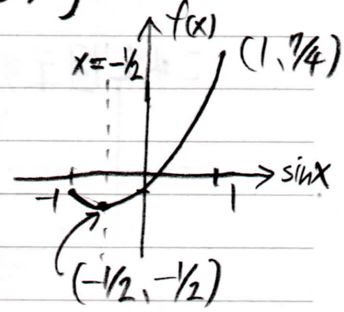
1.(3) 与式を変形する。

$$f(x)=-\cos^2x+\sin x+3/4=-(1-\sin^2x)+\sin x+3/4$$

$$=\sin^2x+\sin x-1/4=(\sin x+1/2)^2-1/2$$

$-1\leqq\sin x\leqq1$ なので、この範囲における $f(x)$ の最大値は $7/4$

∴ $7/4$



1.(4) 関数 $g(t)$ を $g(t)=3tf'(t)$ と定める。また $G(t)$ を $g(t)$ の不定積分とする。
これを用いて与式を変形する。

$$f(x)+\int_1^x 3tf'(t)\,dt = 3x^2+2x+3$$

$$\downarrow \frac{d}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left\{f(x)+\int_1^x g(t)\,dt\right\}=6x+2 \quad (\because g(t)=3tf'(t))$$

$$\frac{d}{dx}\left\{f(x)+G(x)-G(1)\right\}=6x+2$$

$$f'(x)+g(x)=6x+2 \quad (G(1)\text{はただの定数}),\ \left(\frac{d}{dx}G(x)=g(x)\right)$$

$$f'(x)+3xf'(x)=6x+2$$

$$(3x+1)f'(x)=2(3x+1)$$

$$f'(x)=2 \quad (\because x\geqq 0,\ 3x+1\geqq 1)$$

$$f(x)=2x+C \quad (C:\text{積分定数})$$

以上より $f(x)$ の形が特定できたので、これを与式に代入して C の決定作業を行う。

$$2x+C+\int_1^x 3t\cdot 2\,dt = 2x+C+\left[3t^2\right]_{t=1}^{t=x} = 2x+C+3x^2-3$$

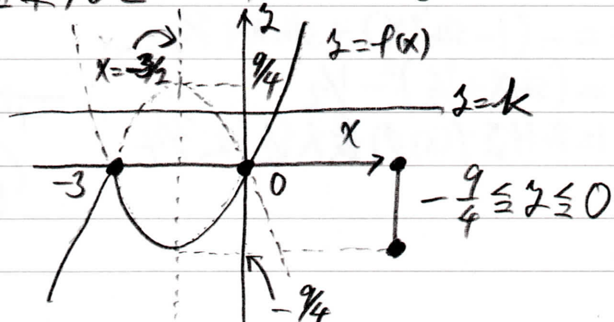
$$=3x^2+2x+C-3 \quad \cdots \quad C-3=3 \quad \cdots \quad C=6$$

$$\therefore f(x)=2x+6$$

1.(5) $f(x)$ の絶対値記号をはずすと次のようになる。

$$f(x)=\begin{cases}-x^2-3x & (x\leqq -3)\\ x^2+3x & (-3<x)\end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases}-(x+\frac{3}{2})^2+\frac{9}{4} & (x\leqq -3)\\ (x+\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4} & (-3<x)\end{cases}$$

これを図示すると以下のようになる。



$-9/4\leqq k\leqq 0$ の範囲では $f(x)=k$ の実数解は2個以上存在する。

$$\therefore k<-9/4,\ 0<k$$

1.(6) limに続く式を変形する。

$$\frac{1-\log_2(2x+2)}{x} = \frac{1-\log_2 2-\log_2(x+1)}{x} = \frac{1-1-\{\log_e(x+1)\}/\log_e 2}{x}$$

$$= -\frac{1}{\log_e 2}\cdot\frac{\log_e(x+1)}{x}$$

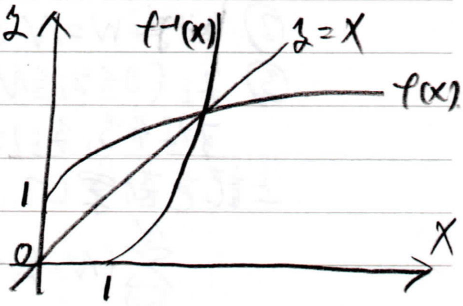
上式より求める極限は次のようになる。

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\log_2(2x+2)}{x} = -\frac{1}{\log_e 2}\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\log_e(x+1)}{x}}_{\to 1} = -\frac{1}{\log_e 2}$$

$$= -\left(\frac{\log_2 2}{\log_2 e}\right)^{-1} = -\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{-1} = -\alpha$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{1-\log_2(2x+2)}{x} = -\alpha$$

1.(7) $f^{-1}(x)$を求めるために$f(x)$を変形する。



$y=\sqrt{x}+1 \rightarrow y-1=\sqrt{x} \rightarrow (y-1)^2=x$

これより$f^{-1}(x)=(x-1)^2$ $(x\geqq 1)$となり、解くべき方程式は次のようになる。

$\sqrt{x}+1=(x-1)^2 \rightarrow \sqrt{x}+1=x^2-2x+1$

$\rightarrow \sqrt{x}=x^2-2x \rightarrow x=x^4-4x^3+4x^2$

$\rightarrow x\{x^3-4x^2+4x-1\}=0 \rightarrow x\{(x^3-3x^2+3x-1)-x^2+x\}=0$

$\rightarrow x\{(x-1)^3-x(x-1)\}=0 \rightarrow x(x-1)\{(x-1)^2-x\}=0$

$\rightarrow x(x-1)(x^2-3x+1)=0$

$x=0$、1は解として不適なので、$x^2-3x+1=0$の解の内1つが求める解となる。

$$x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

ここで$3-\sqrt{5}<1$なので、解$x=(3-\sqrt{5})/2<1/2<1$は不適となる。

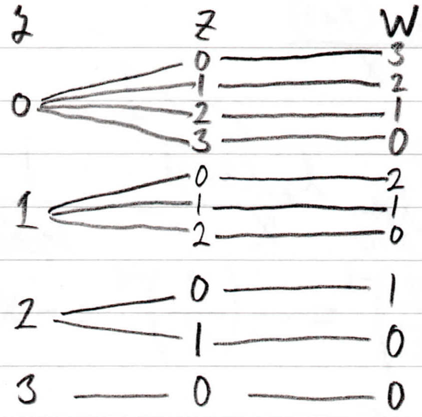
$\therefore x=(3+\sqrt{5})/2$

※ 逆関数と元の関数は$y=x$に対して線対称である事を用いて「$\sqrt{x}+1=x$」を解いても解を求める事ができる。

1.(8) 場合分けをして考える。

(i) $x=4$ ならば $y+z+w=0$ となるので $(x,y,z,w)=(4,0,0,0)$ の1組のみ。

(ii) $x=3$ 〃 〃 $=3$ となり樹形図を描くと以下のようになる。



ここで以下の事柄が分かる。

① y, z が決まれば w は一意に決まる。

② $y+z+w=N$ とおくと y の範囲は $0 \leqq y \leqq N$ となる。

③ $y_i \ (0 \leqq y_i \leqq N)$ に対する z の範囲は $0 \leqq z \leqq N-y_i$ となる。
すなわち、y_i に対する $z(w)$ の組数は $N-y_i+1$ 組となる。

上記を勘案して、$x=3$ の場合の式を立てると次のようになる。

$$\sum_{i=0}^{N}(N-y_i+1)=\sum_{i=0}^{3}(3-i+1)=\sum_{i=0}^{3}(4-i)=4+\sum_{i=1}^{3}(4-i)=4+4\cdot3-\frac{3\cdot4}{2}$$
$$=10$$

これは樹形図の結果と一致する。以降、この式を用いる。

(iii) $x=2$ ならば $y+z+w=6$ となり右式より 28組。
$$\sum_{i=0}^{6}(7-i)=7+7\cdot6-\frac{6\cdot7}{2}=28$$

(iv) $x=1$ 〃 〃 $=9$ 〃 55組。
$$\sum_{i=0}^{9}(10-i)=10+10\cdot9-\frac{9\cdot10}{2}=55$$

(v) $x=0$ 〃 〃 12 〃 91組。
$$\sum_{i=0}^{12}(13-i)=13+13\cdot12-\frac{12\cdot13}{2}=91$$

以上をまとめると、$1+10+28+55+91=185$ となり組の総数は次のようになる。

$\therefore$ 185組

※ x について場合分けを行った後「重複組合せ ${}_nH_r={}_{n+r-1}C_r$」を用いて求める事もできる。

$$\begin{cases} {}_3H_3={}_5C_3=10,\ {}_3H_6={}_8C_6={}_8C_2=28,\ {}_3H_9={}_{11}C_9={}_{11}C_2=55, \\ {}_3H_{12}={}_{14}C_{12}={}_{14}C_2=91 \end{cases}$$

2. 実数a、xの範囲について場合分けを行って、方程式$ax^2=e^x$の異なる実数解の個数について検討する。

(i) $a \leqq 0$の場合

この場合、全てのxに関して、$ax^2 \leqq 0 < e^x$となるので実数解は存在しない。

$\therefore$ $a \leqq 0$ならば異なる実数解の個数は0個。

(ii) $a>0$の場合で$x \leqq 0$の領域

e^xとax^2の差を関数$f(x)=e^x-ax^2$で表す。

$f(x)$の導関数は$f'(x)=e^x-2ax$となり$x \leqq 0$の領域では$f'(x)>0$となる事から

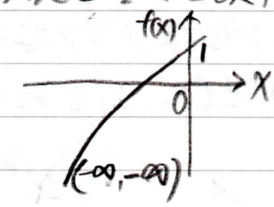
$f(x)$は$x \leqq 0$の範囲において単調増加である。

また$x \to -\infty$の極限は次式より$-\infty$となる。

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (e^x - ax^2) = 0 - \infty = -\infty$$

以上の内容を用いて$f(x)$の増減表を書くと以下のようになる。

x	$-\infty$	$\cdots$	0
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1

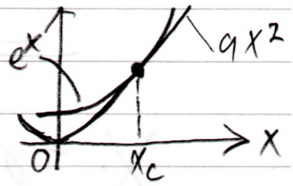


これより$x \leqq 0$の領域において、$f(x)=0$すなわち$ax^2=e^x$となるxが1個存在する。

$\therefore$ $a>0$ならば異なる実数解の個数は“少なくとも”1個。

(iii) $a>0$の場合で$x>0$の領域

$x>0$の領域において、e^xとax^2は単調増加な関数なので、ある点において、e^xとax^2のグラフが接すると仮定し、この点のx座標を$x=x_c$とおく。



この点においては以下の式が成立する。

$$e^{x_c} = a{x_c}^2, \quad [(e^x)']_{x=x_c} = [(ax^2)']_{x=x_c} \cdots e^{x_c} = 2ax_c$$

上式を合わせて解くと$x_c=2$, $a=e^2/4$となる。

以上より$a=e^2/4$であれば$x>0$の領域における$ax^2=e^x$の実数解の個数は1個となる。また$a>e^2/4$であれば、ある点において$ax^2=e^x$を満たし、以降、$ax^2>e^x$となるが極限

$$\lim_{x \to \infty} (e^x - ax^2) = \lim_{x \to \infty} x^2\left(\frac{e^x}{x^2} - a\right) = \infty(\infty - a) = \infty$$

より別のある点において再び$ax^2=e^x$となり以降$ax^2<e^x$となる。

従って$a>e^2/4$であれば$x>0$の領域における$ax^2=e^x$の実数解の個数は2個となる。$a<e^2/4$の場合、$x>0$の領域における$ax^2=e^x$の実数解の個数は0個となる。

2.(続)前述の(i)〜(iii)より実数aに対する方程式$ax^2=e^x$の異なる実数解の個数は以下のようになる。

$a \leqq 0$ … 0個 (∵(i))
$0<a<e^2/4$ … 1個 (∵(ii),(iii))
$a=e^2/4$ … 2個 (〃)
$e^2/4<a$ … 3個 (〃) //

2.(大学公式解答)

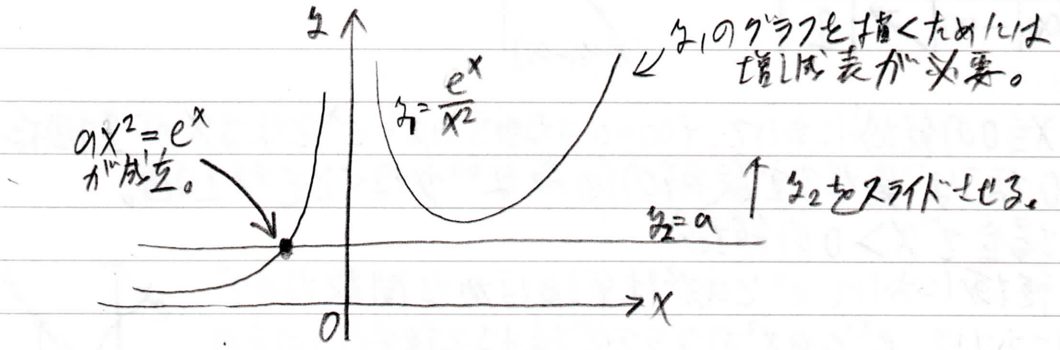
$e^0=1$, $a0^2=0$

方程式$ax^2=e^x$を変形すると$a=e^x/x^2$となる。なお、~~$e^x>0$~~なので$x=0$は$ax^2=e^x$の解とはならない。

ここで2つのグラフ

$y_1=e^x/x^2$, $y_2=a$

を考える。$ax^2=e^x$の解とはすなわちy_1とy_2の交点となる。
y_2はx軸に平行なシンプルなグラフなので、先にy_1の概形を求めた後、y_2をy軸方向にスライドさせて、y_1とy_2の交点の数を探査する。



※このような問題では、こういった解き方が定石。

3.(1) 数学的帰納法を用いて、1以上の全ての整数nについて

$$\frac{d^n}{dx^n}f(x)=\lambda^n f\left(x+\frac{n\pi}{2\lambda}\right),\quad f(x)=\sin(\lambda x)$$

が成立する事を示す。

(i) $n=1$の場合について確認する。

$$\frac{d^1}{dx^1}f(x)=\frac{d}{dx}\sin(\lambda x)=\lambda\cos(\lambda x)=\lambda\sin\left(\lambda x+\frac{\pi}{2}\right)\qquad\left(\because \sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\theta\right)$$
$$=\lambda^1\sin\left\{\lambda\left(x+\frac{1\cdot\pi}{2\lambda}\right)\right\}=\lambda^1 f\left(x+\frac{1\pi}{2\lambda}\right)$$

上式より$n=1$の場合は成立する。

(ii) $n=k$の場合、次のように命題が成立すると仮定する。

$$\frac{d^k}{dx^k}f(x)=\lambda^k f\left(x+\frac{k\pi}{2\lambda}\right)=\lambda^k\sin\left\{\lambda\left(x+\frac{k\pi}{2\lambda}\right)\right\}$$

これを用いて$n=k+1$の場合について確認する。

$$\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}f(x)=\frac{d}{dx}\left\{\frac{d^k}{dx^k}f(x)\right\}=\frac{d}{dx}\left[\lambda^k\sin\left\{\lambda\left(x+\frac{k\pi}{2\lambda}\right)\right\}\right]$$
$$=\lambda^k\cdot\lambda\cos\left\{\lambda\left(x+\frac{k\pi}{2\lambda}\right)\right\}=\lambda^{k+1}\sin\left\{\lambda\left(x+\frac{k\pi}{2\lambda}\right)+\frac{\pi}{2}\right\}$$
$$=\lambda^{k+1}\sin\left\{\lambda\left(x+\frac{k\pi}{2\lambda}+\frac{\pi}{2\lambda}\right)\right\}=\lambda^{k+1}\sin\left\{\lambda\left(x+\frac{k+1}{2\lambda}\pi\right)\right\}$$
$$=\lambda^{k+1}f\left(x+\frac{k+1}{2\lambda}\pi\right)$$

上式より$n=k+1$の場合にも命題が成立する。

以上の(i),(ii)より数学的帰納法を用いて命題

$$\left\{\begin{array}{l}1\text{以上の全ての整数}n\text{について}\\ \dfrac{d^n}{dx^n}f(x)=\lambda^n f\left(x+\dfrac{n\pi}{2\lambda}\right),\ f(x)=\sin(\lambda x)\ \text{が成立する。}\end{array}\right.$$

が示された。 //

No. 藤学班多,

Date

3.(2) 関数の積 $f(x)g(x)$ について式を変形すると次のようになる。

$$f(x)g(x) = \sin(\lambda x)\cos(\lambda x) = \frac{1}{2}\{\sin(\lambda x+\lambda x)+\sin(\lambda x-\lambda x)\} \quad (\because 積和公式)$$
$$= \frac{1}{2}\sin(2\lambda x)$$

これを用いて $f(x)g(x)$ の n 次導関数を求める。

$$\frac{d^n}{dx^n}\{f(x)g(x)\} = \frac{d^n}{dx^n}\left\{\frac{1}{2}\sin(2\lambda x)\right\} = \frac{1}{2}\frac{d^n}{dx^n}\sin(2\lambda x)$$
$$= \frac{1}{2}(2\lambda)^n\sin\left(2\lambda x+\frac{n\pi}{2}\right) = 2^{n-1}\lambda^n\sin\left\{\lambda\left(2x+\frac{n\pi}{2\lambda}\right)\right\}$$
$$= 2^{n-1}\lambda^n\cdot f\left(2x+\frac{n\pi}{2\lambda}\right)$$

上式の n 次導関数を $A(x)f(B(x))$, $A(x)=a_1x+a_0$, $B(x)=b_1x+b_0$ と表した場合の $A(x)$, $B(x)$ の各係数は次のように求められる。

$$a_1 = 0,\quad a_0 = 2^{n-1}\lambda^n,\quad b_1 = 2,\quad b_0 = \frac{n\pi}{2\lambda}$$ //

3.(3) 解答を行うに際し、問題文中において "λを正の定数として" と記載がある事から、これに注意する。命題で与えられている式について

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{d^n}{dx^n}\{f(x)g(x)\}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2}(2\lambda)^n\sin\left\{\lambda\left(2x+\frac{n\pi}{2\lambda}\right)\right\}\right| \leqq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot(2\lambda)^n$$
$$(\because -1 \leqq \sin\theta \leqq 1)$$

であるから、これが収束($\to 0$)するためには $2\lambda < 1$ である必要がある。
すなわち「$0<\lambda<1/2$」が必要条件となる。これは「$0<\lambda<1$」に含まれる。
他方、$\lambda = 3/4$ の場合、「$0<\lambda<1$」は満たされるが、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(2\cdot\frac{3}{4}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n = \infty$$

となり値は発散する。
以上から、解答は次のようになる。

(ア)、必要条件であるが十分条件ではない。 //

4.(1) 与えられている x、y の式を媒介変数 θ で微分すると以下のようになる。

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{d}{d\theta}(\theta-\sin\theta)=1-\cos\theta,\quad \frac{dy}{d\theta}=\frac{d}{d\theta}(1-\cos\theta)=\sin\theta$$

これより、曲線上の点 $(x(\theta),\ y(\theta))$ における接線の傾きは次のように表される。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$$

また、点 $(\frac{3}{2}\pi+1,\ 1)$ に対応する媒介変数 θ の値は以下の計算から $\theta=\frac{3}{2}\pi$ となる。

$$\begin{cases} y=1-\cos\theta=1 \cdots \cos\theta=0 \cdots \theta=\frac{1}{2}\pi \text{ or } \frac{3}{2}\pi \\ x(\theta=\frac{1}{2}\pi)=\frac{1}{2}\pi-1 \cdots \text{不適},\ x(\theta=\frac{3}{2}\pi)=\frac{3}{2}\pi+1 \cdots \text{適} \end{cases}$$

上記の内容を用いて接線 L_1 の方程式を求めると以下のようになる。

$$y-1=\left[\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right]_{\theta=\frac{3}{2}\pi}\cdot\left\{x-\left(\frac{3}{2}\pi+1\right)\right\}=\left(\frac{-1}{1}\right)\cdot\left\{x-\left(\frac{3}{2}\pi+1\right)\right\}$$

$$y=-x+\frac{3}{2}\pi+2$$

以上から求める接線 L_1 の方程式は次のようになる。

$$\underline{L_1 : y=-x+\frac{3}{2}\pi+2}\ //$$

4.(2) 接線 L_2 は接線 L_1 と直交する事から、直線の直交条件より、接線 L_2 の傾きは 1 となる。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=1$$

上式を整理すると $\sin\theta+\cos\theta=1$ となり、合成公式より $\sqrt{2}\sin(\theta+\pi/4)=1$ となる。
これを解くと $\sin(\theta+\pi/4)=1/\sqrt{2} \cdots \theta+\pi/4=\pi/4$ or $3\pi/4$ より $\theta=0$ or $\pi/2$ となるが、$\theta=0$ の場合、$\frac{dy}{dx}$ の値が発散(※)するので、求める θ は $\theta=\pi/2$ となる。

$$※\ \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=\frac{\sin\theta(1+\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}=\frac{\sin\theta(1+\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}=\frac{\sin\theta(1+\cos\theta)}{\sin^2\theta}=\frac{1+\cos\theta\ (\to 2)}{\sin\theta\ (\to 0)}$$

$\theta=\pi/2$ における曲線 C と接線 L_2 の接点は $(\pi/2-1,\ 1)$ となるので、接線 L_2 の方程式は

$$L_2 : y=x-\pi/2+2$$

となる。従って L_1 と L_2 の交点は以下の方程式を解く事によって求められる。

$$-x+3\pi/2+2=x-\pi/2+2 \cdots x=\pi \cdots y=\pi-\pi/2+2=\pi/2+2$$

以上から L_1 と L_2 の交点は次のようになる。

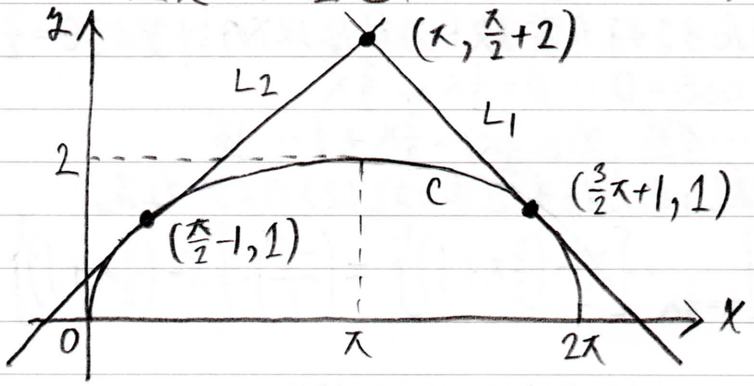
$$\underline{(\pi,\ \pi/2+2)}\ //$$

No. 藤井理登
Date

4.(3) 曲線Cについて増減表を書くと以下のようになる。

θ	0	$\cdots$	$\pi/2$	$\cdots$	π	$\cdots$	$3\pi/2$	$\cdots$	2π
$\frac{dy}{dx}$	$+\infty$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-\infty$
x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}-1$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{3\pi}{2}+1$	$\cdots$	2π
y	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\searrow$	0

これを用いて題意の作図を行うと下図のようになる。



4.(4) 曲線Cとx軸がxの区間$[\frac{\pi}{2}-1, \frac{3}{2}\pi+1]$において囲む領域の面積$I_C$を求める。
ここで$y(x)$の不定積分を$Y(x)$とおく。xはθの関数($x=\theta-\sin\theta$)であるから次式が成立する。

$$\frac{dY(x)}{d\theta}=\frac{dY(x)}{dx}\cdot\frac{dx}{d\theta}=y(x)\cdot\left(\frac{dx}{d\theta}\right)$$

$$Y(x)=\int y(x)dx=\int y(\theta)\left(\frac{dx}{d\theta}\right)d\theta$$

これよりI_Cを求める。

$$I_C=\int_{x=\pi/2-1}^{x=3\pi/2+1}y(x)dx=\int_{\theta=\pi/2}^{\theta=3\pi/2}\underbrace{(1-\cos\theta)}_{y(\theta)}\cdot\underbrace{(1-\cos\theta)}_{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)}d\theta=\int_{\pi/2}^{3\pi/2}(\cos^2\theta-2\cos\theta+1)d\theta$$

$$=\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\left(\frac{1+\cos2\theta}{2}-2\cos\theta+1\right)d\theta=\left[\frac{1}{4}\sin2\theta-2\sin\theta+\frac{3}{2}\theta\right]_{\pi/2}^{3\pi/2}=4+\frac{3}{2}\pi$$

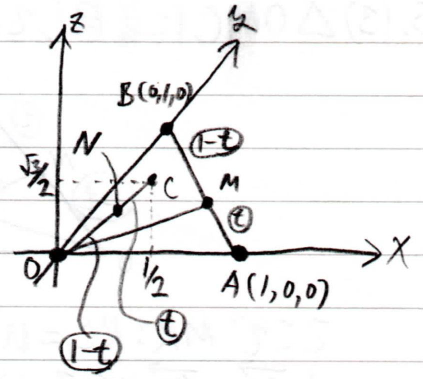
また同区間においてL_1, L_2 x軸が囲む領域の面積I_Lを求める。

$$I_L=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{3}{2}\pi+1\right)-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\right\}\cdot\left\{\left(\frac{\pi}{2}+2\right)-1\right\}+\left\{\left(\frac{3}{2}\pi+1\right)-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\right\}\cdot1$$
$$=\pi^2/4+2\pi+3$$

題意で求められている領域の面積はI_L-I_Cとなるので、求める解は次のようになる。

$$\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi}{2}-1$$

No. 藤紫理奈
Date



5.(1) 内分点の式より$\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$は以下のように表される。

$$\overrightarrow{OM}=\frac{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}}{t+(1-t)}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$$

$$\overrightarrow{ON}=\frac{1-t}{t+(1-t)}\vec{c}=(1-t)\vec{c}$$

これらを用いて$\overrightarrow{MN}$を求めると以下のようになる。

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=(1-t)\vec{c}-\{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\}$$
$$=(t-1)\vec{a}-t\vec{b}+(1-t)\vec{c}$$

以上から$\overrightarrow{MN}$は次のように表される。

$$\underline{\overrightarrow{MN}=(t-1)\vec{a}-t\vec{b}+(1-t)\vec{c}}\quad /\!/$$

5.(2) $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{MP}$を求めると以下のようになる。

$$\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OM}=\vec{c}-\{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\}=(t-1)\vec{a}-t\vec{b}+\vec{c}$$
$$\overrightarrow{MP}=u\overrightarrow{MC}=(t-1)u\vec{a}-tu\vec{b}+u\vec{c}$$

これらを用いて$\overrightarrow{OP}$を求めると次のようになる。

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP}=\{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\}+\{(t-1)u\vec{a}-tu\vec{b}+u\vec{c}\}$$
$$=(1-t+tu-u)\vec{a}+(t-tu)\vec{b}+u\vec{c}$$

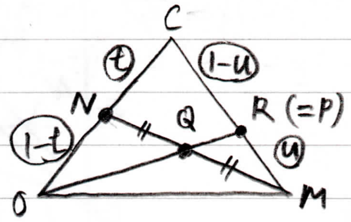
従って係数x, y, zは以下のようになる。

$$x=1-t+tu-u,\quad y=t-tu,\quad z=u$$

以上から$x+y$は次のように表される。

$$\underline{x+y=1-u}\quad /\!/$$

5.(3) $\triangle OMC$に着目して各点を図示すると以下のようになる。



点Cは$\triangle ABC$上の点であり、点Mは辺AB上の点であるから同様に$\triangle ABC$上の点となる。
従って、線分MCは$\triangle ABC$上の線分であり、点Rは線分MC上に存在する。

ここで $MR:RC=u:(1-u)$ とおけば $\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}$ となり、定数kをおくと
$k\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}$ となる。以下に式の比較を示す。

$$k\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}k(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON})=\frac{1}{2}k\{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}+(1-t)\vec{c}\}$$

$$\overrightarrow{OP}=(1-t+tu-u)\vec{a}+(t-tu)\vec{b}+u\vec{c}$$

上式の係数の比較から以下の結果が得られる。

$$\frac{1}{2}k(1-t)=1-t+tu-u=(1-t)(1-u)\cdots\frac{1}{2}k=1-u\ (\because 0\leqq t<1)\quad(\vec{a},\vec{b}\text{の係数})$$

$$\frac{1}{2}k(1-t)=u\cdots(1-u)(1-t)=u\cdots u=(1-t)/(2-t)\quad(\vec{c}\text{の係数})$$

$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}$となるためのuの式が得られたので、$\overrightarrow{OP}$の式を書き換えると次のようになる。

$$\overrightarrow{OP}=\{1-t+(t-1)\cdot(1-t)/(2-t)\}\vec{a}+\{t-t\cdot(1-t)/(2-t)\}\vec{b}+\{(1-t)/(2-t)\}\vec{c}$$

$$=\{(1-t)/(2-t)\}\vec{a}+\{t/(2-t)\}\vec{b}+\{(1-t)/(2-t)\}\vec{c}$$

以上から$\overrightarrow{OR}$は次のように表される。

$$\overrightarrow{OR}=\frac{1}{2-t}\{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}+(1-t)\vec{c}\}\quad//$$

5.(4) $|\overrightarrow{OR}|^2$の計算を行う。なお、$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$、$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$, $\vec{c}\cdot\vec{a}=1/2$、$|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=1$、$|\vec{c}|=1$を用いる。

$$|\overrightarrow{OR}|^2=\frac{1}{(2-t)^2}\{(1-t)^2|\vec{a}|^2+t(1-t)\vec{a}\cdot\vec{b}+(1-t)^2\vec{a}\cdot\vec{c}+t(1-t)\vec{b}\cdot\vec{a}+t^2|\vec{b}|^2+t(1-t)\vec{b}\cdot\vec{c}$$
$$+(1-t)^2\vec{c}\cdot\vec{a}+t(1-t)\vec{c}\cdot\vec{b}+(1-t)^2|\vec{c}|^2\}$$
$$=\frac{1}{(2-t)^2}\{3(1-t)^2+t^2\}=(4t^2-6t+3)/(t^2-4t+4)$$
$$=4+\frac{10t-13}{(t-2)^2}=4+\frac{10}{t-2}+\frac{7}{(t-2)^2}$$

ここで $s=\frac{1}{t-2}$ とおいて変形を行うと以下のようになる。

$$|\overrightarrow{OR}|^2=7s^2+10s+4=7\left(s+\frac{5}{7}\right)^2+\frac{3}{7}$$

$0\leqq t<1$

これより $s=-\frac{5}{7}$ すなわち $t=\frac{3}{5}$ の時$|\overrightarrow{OR}|^2$は最小となる。（tの条件確認も行う。）
以上から$|\overrightarrow{OR}|$の最小値は次のようになる。

$$|\overrightarrow{OR}|_{min}=\sqrt{\frac{3}{7}},\ \left(t=\frac{3}{5}\right)\quad//$$