No. 藤崎理系

Date

1.(1) 与式の分子を変形すると以下のようになる。

$$\sin 2x - \sin 3x = 2\sin x\cos x - (3\sin x - 4\sin^3 x)$$
$$= \sin x(2\cos x - 3 + 4\sin^2 x)$$

また $\lim_{x\to 0} \sin x/x = 1$ なので求める極限は次のようになる。

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x - \sin 3x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}(2\cos x - 3 + 4\sin^2 x) = 1\cdot(2\cdot 1 - 3 + 4\cdot 0) = -1$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x - \sin 3x}{x} = -1$$ //

1.(2) 不等式を $x < 3/2$、$3/2 \leqq x < 5$、$x \geqq 5$ の範囲で絶対値を用いないで表すと以下のようになる。

- $x < 3/2$ $: |2x-3| - 3|x-5| = (-1)(2x-3) - 3(-1)(x-5) = x - 12$ —①
- $3/2 \leqq x < 5$ $: |2x-3| - 3|x-5| = (1)(2x-3) - 3(-1)(x-5) = 5x - 18$ —②
- $x \geqq 5$ $: |2x-3| - 3|x-5| = (1)(2x-3) - 3(1)(x-5) = -x + 12$ —③

①式において $x - 12 > 0$ となる x の範囲は $x > 12$ となり、$x < 3/2$ の範囲外である。
②式において $5x - 18 > 0$ となる x の範囲は $x > 18/5$ となり、$3/2 \leqq x < 5$ の範囲と重なる。
③式において $-x + 12 > 0$ となる x の範囲は $x < 12$ となり、$x \geqq 5$ の範囲と重なる。
以上の事をまとめると次のようになる。

$18/5 < x < 5$ ($\because$②)、$5 \leqq x < 12$ ($\because$③)

よって求める x の範囲は次のようになる。

$18/5 < x < 12$ //

1.(3) 与えられた不等式について、以下のように場合分けを行い、x の範囲を求める。

(i) $0 < x+1 < 1$ $(-1 < x < 0)$ の場合

$\log_{x+1}(3-x) > 0 \cdots 3 - x < 1 \cdots x > 2$

これは前提 $(-1 < x < 0)$ に反しているので不適である。

(ii) $x + 1 > 1$ $(x > 0)$ の場合

$\log_{x+1}(3-x) > 0 \cdots 3 - x > 1 \cdots x < 2$

これは前提 $(x > 0)$ を満たしているので、これと合わせて x の範囲は $0 < x < 2$ となる。

また底の条件、真数条件は次のようになる。

$x + 1 > 0 \cdots x > -1$, $x + 1 \neq 1 \cdots x \neq 0$, $3 - x > 0 \cdots x < 3$

(ii) で求めた x の範囲 $(0 < x < 2)$ は上記の条件を満たすので、不等式の解は次のようになる。

$0 < x < 2$ //

1.(4) 与えられた定積分の式を計算すると次のようになる。

$$\int_{-3}^{-5/2}[x](x+1)dx=\int_{-3}^{-5/2}(-3)(x+1)dx=-3\left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-3}^{-5/2}$$

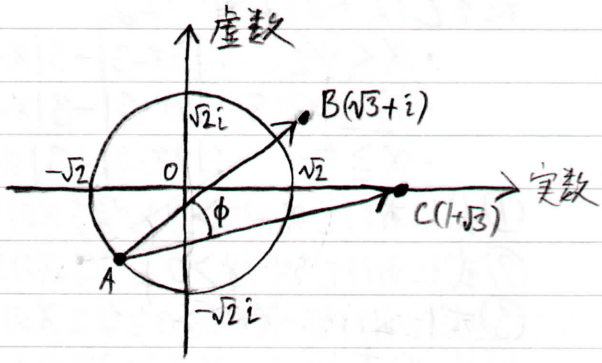
$$=-3\left\{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{25}{4}-\frac{5}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot 9-3\right)\right\}=-3\cdot\frac{25-20-36+24}{8}$$

$$=-3\cdot\left(-\frac{7}{8}\right)=\frac{21}{8}$$

以上から求める値は次のようになる。

$$\int_{-3}^{-5/2}[x](x+1)dx=\frac{21}{8}$$ //

1.(5) 題意の状況を図示すると右のようになる。



また、点Aの位置を表す複素数αを次のように定める。

$$\alpha=\sqrt{2}\cos\theta+\sqrt{2}i\sin\theta$$

ここで点Aから点Bに向かうベクトル$\overrightarrow{AB}$を次のように定める。

$$\overrightarrow{AB}=(b_1,b_2)=(\sqrt{3}-\sqrt{2}\cos\theta,\ 1-\sqrt{2}\sin\theta)$$

同様に$\overrightarrow{AC}$ベクトルも次のように定める。

$$\overrightarrow{AC}=(c_1,c_2)=(1+\sqrt{3}-\sqrt{2}\cos\theta,\ -\sqrt{2}\sin\theta)$$

定めたベクトルを用いて三角形の面積Sを計算すると以下のようになる。

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\phi=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sqrt{1-\cos^2\phi}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\phi)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(b_1^2+b_2^2)(c_1^2+c_2^2)-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{b_1^2c_1^2+b_1^2c_2^2+b_2^2c_1^2+b_2^2c_2^2-(b_1c_1+b_2c_2)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{b_1^2c_2^2-2b_1c_2b_2c_1+b_2^2c_1^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(b_1c_2-b_2c_1)^2}=\frac{1}{2}|b_1c_2-b_2c_1|$$

上記計算結果をθを用いて表すと次のようになる。

$$S=\frac{1}{2}\left|(\sqrt{3}-\sqrt{2}\cos\theta)(-\sqrt{2}\sin\theta)-(1-\sqrt{2}\sin\theta)(1+\sqrt{3}-\sqrt{2}\cos\theta)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\sqrt{2}(\sin\theta+\cos\theta)-(1+\sqrt{3})\right|=\frac{1}{2}\left|\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-(1+\sqrt{3})\right|$$

上式の絶対値が最大となるのは$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-1$すなわち$\theta=\frac{5}{4}\pi$の時である。
従って、面積の最大値とその時のαは次のようになる。

面積の最大値: $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ 、 $\alpha=-1-i$ //

No. 藤崇指系

Date

1.(6) 与式を変形すると以下のようになる。

$$123_{(m)} + 10_{(2)} \times m = 77_{(8)}$$

$$1\times m^2 + 2\times m^1 + 3\times m^0 + (1\times 2^1 + 0\times 2^0)\times m = 7\times 8^1 + 7\times 8^0$$

$$m^2 + 2m + 3 + 2m = 63$$

$$m^2 + 4m - 60 = 0 \cdots (m+10)(m-6) = 0 \cdots m = 6, -10$$

mは通常正の値なので、求める値は次のようになる。

$\underline{m=6}$ //

1.(7) 余事象の考えを用いて問題を解く。

すなわち、あいこに"ならない"確率を求めて、全ての確率の合計1から この確率を差し引いて、あいこになる確率を求める。

始めに、あいこに"ならない"とは、どのような事象なのかを考える。

あいこに"ならない" ⇒ 勝負が付く ⇒ (・場に出る手は3種類ではない ・場に出る手は1種類ではない)

⇒ 場に出る手は2種類 (この2種類の組合せは3通り)($\because {}_3C_2 = 3$)

上記の検討内容から、参加者が2つの選択肢のどちらかを選ぶ組合せは 2^n 通りある。しかし全員が同じ選択を行ってはいけないので、組合せは 2^n-2 通りとなり、また選択肢の組合せは3通りである事から、あいこにならない組合せの総数は次のようになる。

$3(2^n-2)$ 通り

これより、あいこに"なる"確率は次のように表される。

$$\frac{3^n - 3(2^n-2)}{3^n} = 1 - \frac{2^n-2}{3^{n-1}}$$

上式を用いて題意の不等式を立てると以下のようになる。

$$1 - \frac{2^n-2}{3^{n-1}} \leqq \frac{1}{2} \cdots 3^{n-1} \leqq 2^{n+1} - 4$$

ここでnに4,5を代入すると以下のようになる。

$n=4$, $3^3=27$, $2^5-4=28$, 不等式を満たす

$n=5$, $3^4=81$, $2^6-4=60$, 不等式を満たさない

従って、あいこになる確率が0.5以下になる最大の人数は次のようになる。

$\underline{n=4}$ //

No. 藤崎聖斗

Date

1.(8) 整式 x^{53} を、x^2+x+1 で割った時の商を $Q(x)$、余りを $R(x)$ として次のように表す。

$$x^{53}=(x^2+x+1)Q(x)+R(x) \quad -①$$

$R(x)$ は x^2+x+1 で割った余りなので、一次式となり、a, b を用いて次のように書き換える事ができる。

$$x^{53}=(x^2+x+1)Q(x)+ax+b \quad -②$$

ここで ω を $x^2+x+1=0$ の解とすると、この ω は以下の方程式を満たす。

$$\omega^2+\omega+1=0 \quad \cdots \omega^2=-(\omega+1), \quad \omega^3=-\omega(\omega+1)=-\omega^2-\omega=1$$

この ω を与式 x^{53} に代入し変形すると以下のようになる。

$$\omega^{53}=\omega^2\cdot\omega^{51}=\omega^2(\omega^3)^{17}=\omega^2\cdot 1^{17}=-(\omega+1) \quad -③$$

また、②式の右辺にも ω を代入すると以下のようになる。

$$(\omega^2+\omega+1)Q(\omega)+a\omega+b=0\cdot Q(\omega)+a\omega+b=a\omega+b \quad -④$$

③式と④式は等しいので $a=-1$, $b=-1$ となる。

従って求める余りは次のようになる。

$$\underline{-x-1} \;//$$

No. 藤崇瑛至
Date

2.(1) 与えられた不等式を整理すると次のようになる。

$$x^2-2x+1>0 \cdots (x-1)^2>0 \quad —①$$

xが実数の範囲であれば①式の左辺は常にゼロ以上となり、
$x=1$の時、$(x-1)^2=0$となって不等式は満たされなくなる。
従って求めるxの範囲は次のようになる。

$x<1$ または $x>1$ //

2.(2) 与式を変形していくと以下のようになる。

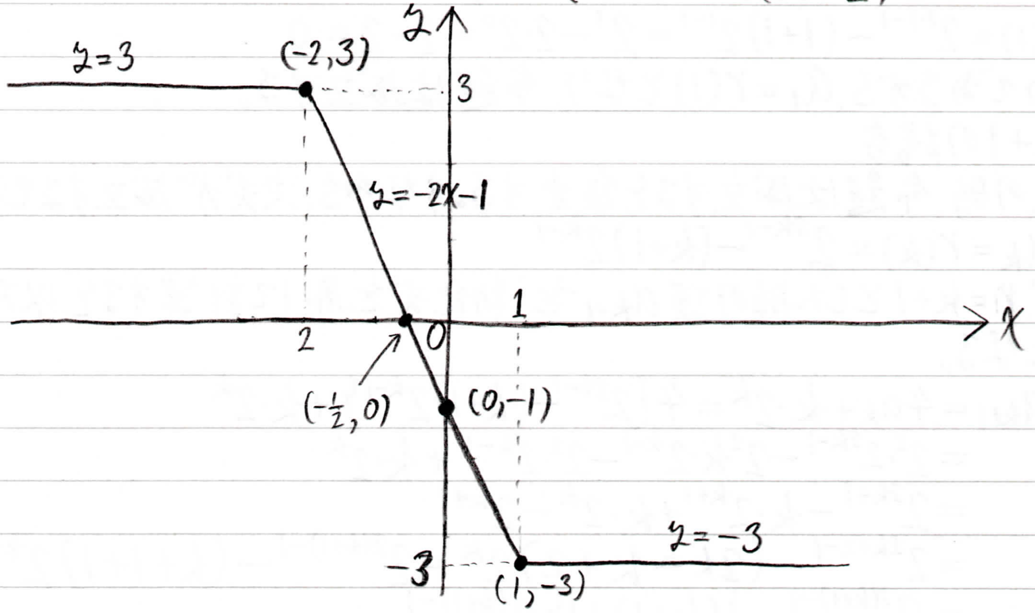
$$y=\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+4x+4}=\sqrt{(x-1)^2}-\sqrt{(x+2)^2}$$
$$=|x-1|-|x+2| \quad —②$$

②式より、$x<-2$、$-2\leqq x<1$、$x\geqq 1$の範囲で絶対値を用いない形で式を表現すると次のようになる。

- $x<-2$: $y=|x-1|-|x+2|=(-1)(x-1)-(-1)(x+2)=-x+1+x+2=3$
- $-2\leqq x<1$: $y=|x-1|-|x+2|=(-1)(x-1)-(1)(x+2)=-x+1-x-2=-2x-1$
- $x\geqq 1$: $y=|x-1|-|x+2|=(1)(x-1)-(1)(x+2)=x-1-x-2=-3$

以上の内容をまとめると以下のようになり、グラフを図示すると下のようになる。

$$y=\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+4x+4}=\begin{cases} 3 & (x<-2) \\ -2x-1 & (-2\leqq x<1) \\ -3 & (x\geqq 1) \end{cases}$$



No. 藤崎理系

Date

3.(1) 問題より以下の2式が与えられており、式番号が付与されている。

$a_{n+1}=4a_n+n\cdot 2^n$ —① 、 $a_n=2^{2n-1}-(n+1)2^{n-1}$ —②

この①式と$a_1=0$を用いて、a_3を求める。

$a_2=4a_1+1\cdot 2^1=4\cdot 0+2=2 \quad \cdots \quad a_2=2$

$a_3=4a_2+2\cdot 2^2=4\cdot 2+8=16 \quad \cdots \quad a_3=16$

従って、$a_3=16$となる。

またnの関数$r(n)$を次のように定める。

$r(n)=2^{2n-1}-(n+1)2^{n-1}$ —③

③式より$r(3)$を計算すると次のようになる。

$r(3)=2^{2\cdot 3-1}-(3+1)2^{3-1}=2^5-4\cdot 2^2=32-16=16 \quad \cdots \quad r(3)=16$

以上の結果をまとめると次のようになる。

$a_3=16$, $r(3)=16$ //

3.(2) 命題を次のように定める。

「1以上の整数(自然数)をnとした時、漸化式$a_{n+1}=4a_n+n\cdot 2^n$, $a_1=0$の一般項は$a_n=2^{2n-1}-(n+1)2^{n-1}$である。」—☆

上記の命題を数学的帰納法を用いて示す。

(i) $n=1$の場合

③式に$n=1$を代入すると次のようになる。

$r(1)=2^{2\cdot 1-1}-(1+1)2^{1-1}=2^1-2\cdot 2^0=2-2=0$

$a_1=0$であるから、$a_1=r(1)$となり、命題は成立する。

(ii) $n=k+1$の場合

$n=k$の時、命題は成立すると仮定する。すなわち、次式が成立するものとする。

$a_k=r(k)=2^{2k-1}-(k+1)2^{k-1}$

ここで、$n=k+1$とした時の項a_{k+1}を漸化式を用いて計算すると以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
a_{k+1}&=4a_k+k\cdot 2^k=4\{2^{2k-1}-(k+1)2^{k-1}\}+k\cdot 2^k\\
&=2^2\cdot 2^{2k-1}-2^2k\cdot 2^{k-1}-2^2\cdot 2^{k-1}+k\cdot 2^k\\
&=2^{2k+1}-k\cdot 2^{k+1}+k\cdot 2^k-2^{k+1}\\
&=2^{2k+2-1}-(2k-k+2)2^k=2^{2(k+1)-1}-(k+1+1)2^{k+1-1}\\
&=2^{2(k+1)-1}-\{(k+1)+1\}2^{(k+1)-1}
\end{aligned}
$$

上記、式中の$(k+1)$をnに置き換えると$a_n=2^{2n-1}-(n+1)2^{n-1}$となり命題が成立する事が分かる。

以上(i),(ii)より数学的帰納法を用いて前述の命題☆が成立する事が示された。

3.(補足)

問. 漸化式 $a_1=0,\ a_{n+1}=4a_n+n\cdot 2^n$ を解け。

解. 与えられた漸化式の両辺を4^{n+1}で割ると次のようになる。

$$\frac{a_{n+1}}{4^{n+1}}=\frac{4a_n}{4^{n+1}}+\frac{n\cdot 2^n}{4^{n+1}}=\frac{a_n}{4^n}+\frac{n}{4}\cdot\frac{2^n}{4^n}=\frac{a_n}{4^n}+\frac{n}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

ここで$a_n/4^n$をb_nとおくと上式は次のような階差数列型の漸化式となる。

$$b_{n+1}=b_n+\frac{n}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

従って数列b_nの一般項は以下のようになる。

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^k,\quad b_1=\frac{a_1}{4^1}=\frac{0}{4}=0$$

$$b_n=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1}k\left(\frac{1}{2}\right)^k,\quad b_1=0$$

次にb_nの一般項の和の部分を求めるため、S_mを次のように定め計算を行う。

$$S_m=\sum_{k=1}^{m}k\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$S_m-\frac{1}{2}S_m=\sum_{k=1}^{m}k\left(\frac{1}{2}\right)^k-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}k\left(\frac{1}{2}\right)^k=\sum_{k=1}^{m}k\left(\frac{1}{2}\right)^k-\sum_{k=1}^{m}k\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$

$$=\left\{1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1+\sum_{k=2}^{m}k\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}-\left\{\sum_{k=2}^{m+1}(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}$$

$$=\left\{\frac{1}{2}+\sum_{k=2}^{m}k\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}-\left\{\sum_{k=2}^{m}(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^k+(m+1-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}\right\}$$

$$=\sum_{k=2}^{m}\left\{k\left(\frac{1}{2}\right)^k-(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}+\frac{1}{2}-m\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}$$

$$=\sum_{k=2}^{m}\left(\frac{1}{2}\right)^k+\frac{1}{2}-m\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2}\right)^k-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-m\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}$$

$$=\frac{1/2\{1-(1/2)^m\}}{1-1/2}-m\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^m-m\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}$$

$$=1-\frac{m+2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^m$$

$$\frac{1}{2}S_m=1-\frac{m+2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^m\quad\cdots\quad S_m=2-(m+2)\left(\frac{1}{2}\right)^m$$

No. 藤堂理希

Date

前述の計算結果を用いると数列b_nは次のように表される。

$$b_n=\frac{1}{4}\left\{2-(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=2^{-1}-(n+1)\cdot 2^{-n-1}$$

数列b_nは$a_n/4^n$なので、数列a_nは以下のように求められる。

$$a_n=4^n\left\{2^{-1}-(n+1)2^{-n-1}\right\}=2^{2n}\left\{2^{-1}-(n+1)2^{-n-1}\right\}$$

$$=2^{2n-1}-(n+1)2^{n-1}$$

確認のため$n=1,2,3$を求めると、$a_1=0$、$a_2=2$、$a_3=16$となり、
求めた一般項a_nは正しい事が分かる。
以上から求める漸化式の一般項は次のようになる。

$$\underline{a_n=2^{2n-1}-(n+1)2^{n-1}}\ /\!/$$

$$\sum_{k=1}^{m}k\left(\frac{1}{2}\right)^k=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+(m-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{m-2}+(m-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}+m\left(\frac{1}{2}\right)^m$$

$$-)\ \sum_{k=1}^{m}k\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\left(\frac{1}{2}\right)^3+3\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots+(m-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}+(m-1)\left(\frac{1}{2}\right)^m+m\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}$$

$$1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1+(2-1)\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+(m-1-m+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}+(m-m+1)\left(\frac{1}{2}\right)^m-m\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}$$

$$\to\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^m-m\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}$$

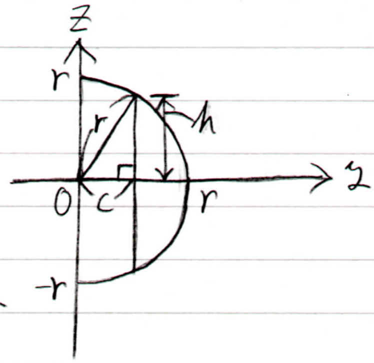
$$\to\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2}\right)^k-m\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}$$

$$\to\frac{1/2\left\{1-(1/2)^m\right\}}{1-1/2}-m\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}$$

No. 藤柴理系

Date

4.(1) 題意の図形のx-z断面を描くと右のようになる。



平面$x=C$による円形の切り口の半径、すなわち右図におけるhの長さは三平方の定理より次のように求められる。

$$h=\sqrt{r^2-c^2}$$

切り口面(円)の半径が求められたので、求める面積$S(c)$は次のように表される。

$$S(c)=\pi(r^2-c^2) \quad //$$

4.(2) 立体の体積V_Aを求めると以下のようになる。

$$V_A=\int_{x=c}^{x=r} S(x)\,dx=\int_{x=c}^{x=r}\pi(r^2-x^2)\,dx=\pi\left[r^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{x=c}^{x=r}$$

$$=\pi\left\{\left(r^3-\frac{1}{3}r^3\right)-\left(r^2c-\frac{1}{3}c^3\right)\right\}=\pi\left(\frac{2}{3}r^3-r^2c+\frac{1}{3}c^3\right)$$

上記で求めたV_Aについて、cに$r/2$を代入すると次のようになる。

$$V_A=\pi\left\{\frac{2}{3}r^3-r^2\left(\frac{r}{2}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{r}{2}\right)^3\right\}=\pi r^3\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{24}\right)=\frac{5}{24}\pi r^3 \quad ―①$$

また体積V_Bは半球の体積から体積V_Aを差し引いたものになるので次のように求められる。

$$V_B=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3-\frac{5}{24}\pi r^3=\frac{11}{24}\pi r^3 \quad ―②$$

以上①,②式より体積V_A, V_Bの比は次のようになる。

$$V_A:V_B=5:11 \quad //$$